

1.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo pode ser considerado introdutório. Nele são estabelecidos os princípios sobre os quais serão desenvolvidos os capítulos seguintes.

Serão modelados alguns sistemas simples, nos quais ocorre transformação de energia elétrica em mecânica ou vice-versa.

O estudo desses sistemas permitirão estabelecer os princípios básicos que explicam os fenômenos associados à conversão eletromecânica de energia.

Os resultados obtidos serão genéricos e serão empregados no desenvolvimento dos demais capítulos, nos quais serão estabelecidos os modelos da máquina de indução.

As máquinas cuja conversão eletromecânica de energia dependa da presença de campos elétricos serão excluídas deste texto, visto que não apresentam interesse para o estudo da máquina de indução.

1.2 CIRCUITO R - L

Consideremos a Fig. 1.1. Nela está representado um sistema constituído por uma bobina enrolada sobre um bastão de material magnético. Na Fig. 1.2 está representado o circuito equivalente do sistema. Nela aparece a indutância da bobina e a resistência do fio.

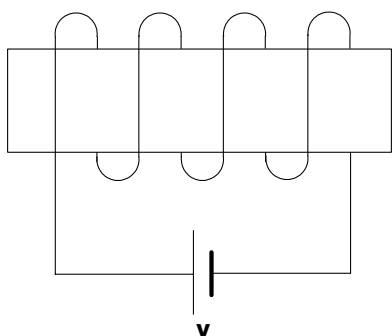


Fig. 1.1 – Circuito magnético simples.

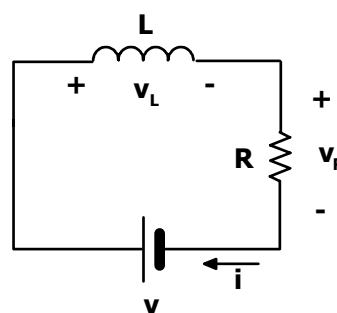


Fig. 1.2 – Circuito elétrico equivalente.

Empregando a teoria de circuitos elétricos, pode-se estabelecer as equações (1.1) e (1.2) que relacionam as tensões e a corrente do circuito.

$$v = v_R + v_L \quad (1.1)$$

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (1.2)$$

Multiplicando-se todos os membros da equação (1.2) por i , obtém-se a equação (1.3)

$$vi = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad (1.3)$$

mas

$$Li \frac{di}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)}{dt} \quad (1.4)$$

Assim

$$vi = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)}{dt} \quad (1.5)$$

Na expressão (1.5) tem-se as seguintes grandezas:

V_i → potência instantânea fornecida pela fonte ao circuito;

Ri^2 → potência instantânea dissipada na resistência do circuito;

$\frac{1}{2}Li^2$ → energia instantânea armazenada no campo magnético;

$\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt}$ → velocidade instantânea de crescimento da energia no campo magnético. Esta grandeza tem a dimensão de potência.

É preciso ter em mente que no sistema apresentado na Fig. 1.1, não existe conversão eletromecânica de energia. Toda energia fornecida pela fonte é transformada em calor e acumulada no campo magnético. Neste caso, somente a equação (1.5) representa o comportamento do sistema apresentado.

1.3 MÁQUINA ELEMENTAR A DESLOCAMENTO LINEAR

Considerando-se a Fig. 1.3, semelhante a Fig. 1.1, mas com uma diferença fundamental: possibilidade de haver movimento relativo entre a bobina e o seu núcleo. Desta forma existe a possibilidade de variação do valor da indutância. A indutância da bobina é função de x , posição relativa entre ela e o seu núcleo.

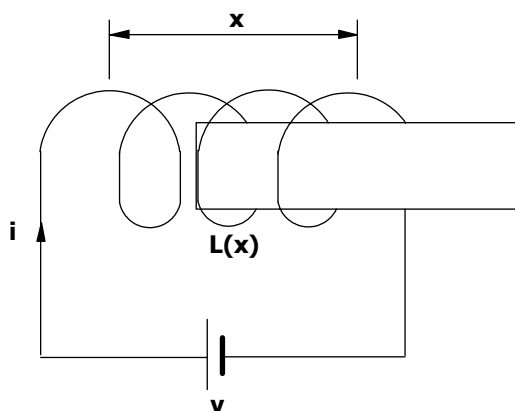


Fig. 1.3 – Circuito magnético sujeito a uma força mecânica externa.

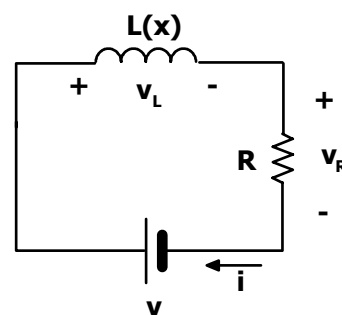


Fig. 1.4 – Circuito elétrico equivalente.

O circuito equivalente encontra-se representado na Fig. 1.4. Empregando-se a teoria de circuitos elétricos, obtém-se a expressão (1.6)

$$v = v_R + v_L \quad (1.6)$$

$$v = Ri + \frac{d\phi}{dt} \quad (1.7)$$

$$\phi = L(x)i \quad (1.8)$$

Assim:

$$v = Ri + \frac{d(L(x)i)}{dt} \quad (1.9)$$

como $L(x)$ e i são variáveis, obtém-se:

$$v = Ri + L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dt} \quad (1.10)$$

Multiplicando-se todos os membros da expressão (1.10) por i obtém-se a expressão (1.11)

$$vi = Ri^2 + L(x)i\frac{di}{dt} + i^2\frac{dL(x)}{dt} \quad (1.11)$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}L(x)i^2\right)}{dt} = L(x)i\frac{di}{dt} + \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dt} \quad (1.12)$$

$$L(x)i\frac{di}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}L(x)i^2\right)}{dt} - \frac{1}{2}i^2\frac{dL(x)}{dt} \quad (1.13)$$

Levando-se a expressão (1.13) na expressão (1.11) obtém-se a expressão (1.14):

$$v_i = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}L(x)i^2\right)}{dt} - \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dt} + i^2 \frac{dL(x)}{dt} \quad (1.14)$$

Assim:

$$v_i = Ri^2 + \frac{d\left(\frac{L(x)i^2}{2}\right)}{dt} + \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dt} \quad (1.15)$$

Observamos que a expressão (1.15) possui o termo $\frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dt}$ a mais em relação a expressão (1.5). Esse termo existe como consequência da variação da indutância do sistema e representa a diferença entre a potência fornecida pela fonte e as potências dissipadas na resistência do circuito e armazenada no campo magnético.

Assim:

$$\frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dt} = v_i - \left(Ri^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}L(x)i^2\right)}{dt} \right) \quad (1.16)$$

Este termo corresponde à potência elétrica convertida em potência mecânica.

Portanto:

$$P_{mec} = F \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dt} \quad (1.17)$$

$$\frac{dL(x)}{dt} = \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (1.18)$$

Assim:

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL(x)}{dx} \quad (1.19)$$

A expressão (1.19) é muito importante e estabelece o princípio básico da conversão eletromecânica de energia. Estabelece que uma força é produzida quando a

indutância é variável com o deslocamento. Este princípio explica o funcionamento de todos os sistemas nos quais ocorre conversão eletromecânica de energia.

O sistema representado na Fig. 1.1 possui uma só variável dependente, a corrente do circuito. Por isto o seu comportamento é representado apenas pela expressão (1.2). O sistema representado na Fig. 1.3 possui duas variáveis dependentes, a corrente e a posição relativa entre o núcleo e a bobina. Por esta razão a equação (1.10) não basta para representar o seu comportamento.

Deve-se obter a equação mecânica do sistema para completar o modelo.

Considerando-se a Fig. 1.5

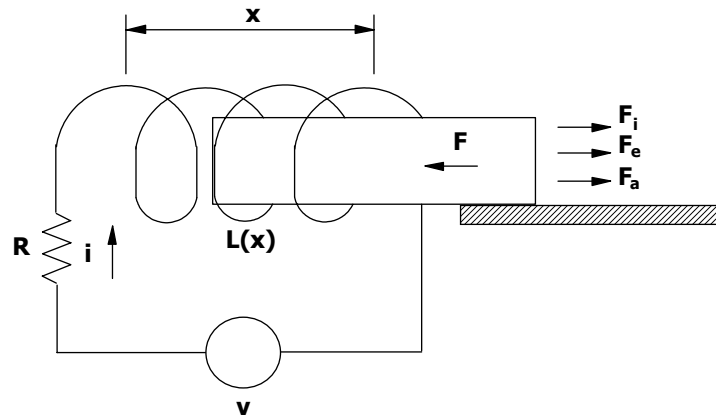


Fig. 1.5 – Circuito magnético simples com possibilidade de deslocamento do núcleo.

$$F_a = D \frac{dx}{dt} \Rightarrow \text{é a força de atrito.}$$

$$F_i = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \text{é a força de inércia.}$$

$$F_e \Rightarrow \text{é a força externa aplicada sobre o núcleo}$$

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} \Rightarrow \text{é a força elétrica.}$$

O equilíbrio mecânico estabelece que:

$$F = F_e + F_i + F_a \quad (1.20)$$

Reunindo-se as equações elétrica e mecânica, obtém-se o modelo completo representado pelas equações (1.21) e (1.22):

$$\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx} - D \frac{dx}{dt} - m \frac{d^2x}{dt^2} = F_e \quad (1.21)$$

$$Ri + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dt} = V \quad (1.22)$$

Como entradas ou variáveis independentes temos a tensão e a força externa. Como saídas ou variáveis dependentes temos a posição relativa x e a corrente i .

Como parâmetros do sistema temos o coeficiente de atrito D , a massa do núcleo m , a resistência da bobina R e a sua indutância $L(x)$.

Podemos representar o sistema de acordo com a Fig. 1.6.

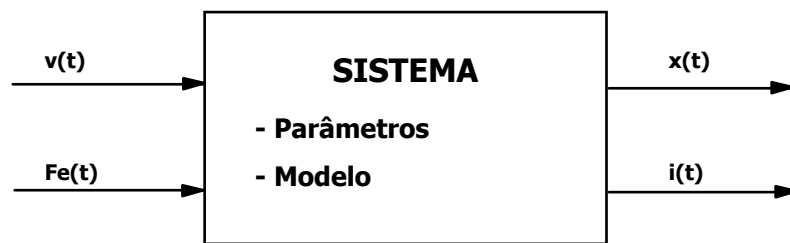


Fig. 1.6 – Representação por bloco do sistema de equações.

O sistema estudado, com a sua aparente simplicidade é representado por um modelo relativamente complexo, na medida em que é não-linear e de difícil, senão impossível, tratamento analítico.

1.4 MÁQUINA ELEMENTAR ROTATIVA COM UM ROLAMENTO. TORQUE DE RELUTÂNCIA

Consideremos a máquina elementar representada na Fig. 1.7:

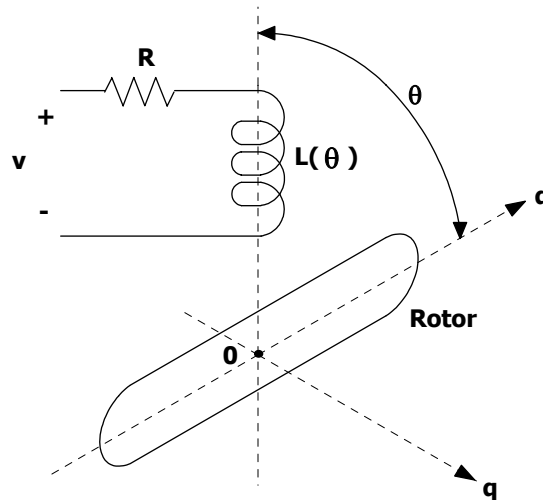


Fig. 1.7 – Representação da máquina elétrica elementar de um enrolamento.

O rotor desta máquina elementar pode girar em torno do eixo “O”. Quando o rotor se desloca em relação à bobina, a indutância da bobina $L(\theta)$ varia.

Por analogia com o sistema apresentado na Fig. 1.5, podemos obter a equação elétrica do sistema, representado pela expressão (1.23):

$$V = Ri + L(\theta) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(\theta)}{dt} \quad (1.23)$$

Do mesmo modo podemos estabelecer a expressão do torque elétrico produzido pelo sistema

$$P_{\text{mec}} = T \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\theta)}{dt} \quad (1.24)$$

Assim:

$$T \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (1.25)$$

Portanto:

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (1.26)$$

A expressão (1.26) estabelece uma relação entre o torque produzido sobre o rotor e a variação da indutância própria do enrolamento. É preciso enfatizar que para o

sistema apresentado, o torque depende da variação da indutância própria do enrolamento.

A variação da indutância é decorrente da variação da relutância segundo o eixo da bobina, com o deslocamento angular do rotor. Por isto é denominado torque de relutância.

Analisando-se a variação da indutância própria da bobina com a posição, constata-se que ela assume valores máximos quando θ é igual a 0° e 180° , assume valores mínimos quando θ é igual a 90° e 270° .

Pode-se representar $L(\theta)$ de acordo com a Fig. 1.8:

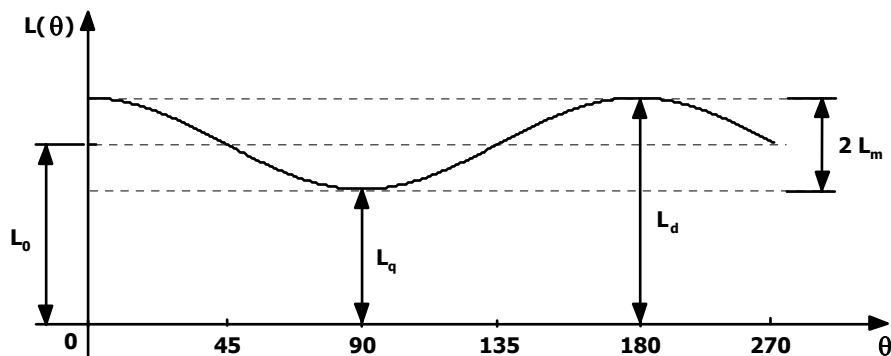


Fig. 1.8 – Variação da indutância própria da bobina em função do ângulo θ .

Tal função pode geralmente ser representada com boa precisão pela expressão (1.27):

$$L(\theta) = L_m \cos 2\theta + L_0 \quad (1.27)$$

Neste caso, em que a função $L(\theta)$ é conhecida, a expressão do torque pode ser obtida numa forma mais adequada ao uso.

Levando-se a expressão (1.27) em (1.26) obtém-se a expressão (1.28):

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{dt} (L_m \cos 2\theta + L_0) \quad (1.28)$$

Assim, em módulo:

$$T = L_m i^2 \sin 2\theta \quad (1.29)$$

De acordo com a Fig. 1.8, as indutâncias de eixo direto e quadratura assumem os valores representados pelas expressões (1.30) e (1.31):

$$L_d = L_0 + L_m \quad (1.30)$$

$$-L_q = -L_0 + L_m \quad (1.31)$$

Assim:

$$L_m = \frac{L_d - L_q}{2} \quad (1.32)$$

$$T = \frac{(L_d - L_q)}{2} i^2 \sin\theta \quad (1.33)$$

A expressão (1.33) traduz o fato de que o torque só existe na medida em que as indutâncias de eixo direto e quadratura sejam diferentes. Pode-se ainda representar a expressão do torque em função da relutância de eixo direto e quadratura, R_d e R_q .

Sabe-se que:

$$L_d = \frac{n^2}{R_d} \quad (1.34)$$

$$L_q = \frac{n^2}{R_q} \quad (1.35)$$

onde n representa o número de espiras da bobina. Assim:

$$T = \frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_q} \right) \cdot i^2 \sin 2\theta \quad (1.36)$$

Deste modo:

$$T = \frac{n^2}{2} \left(\frac{R_q - R_d}{R_d \cdot R_q} \right) \cdot i^2 \sin 2\theta \quad (1.37)$$

Se o rotor for cilíndrico, tem-se que $R_d = R_q$ e o torque produzido é nulo.

Resta-nos ainda representar o modelo completo da máquina elementar representada na Fig. 1.7.

A equação mecânica é representada pela expressão (1.38):

$$T = T_a + T_e + T_i \quad (1.38)$$

Assim, o modelo completo fica representado pelas equações (1.39) e (1.40).

$$\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(\theta)}{d\theta} - D \frac{d\theta}{dt} - J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_e \quad (1.39)$$

$$Ri + L(\theta) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(\theta)}{dt} = v \quad (1.40)$$

A representação do sistema em bloco aparece na Fig. 1.9.

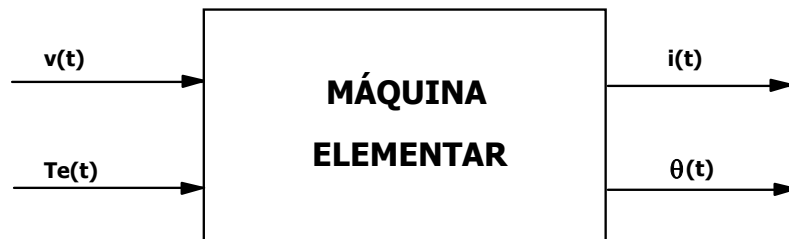


Fig. 1.9 – Representação de máquina elementar de um enrolamento com as variáveis de entrada e saída.

A tensão de alimentação e o torque externo de carga são variáveis independentes. A corrente e a posição angular são as variáveis dependentes.

O princípio aqui exposto é de grande importância prática. Basta lembrar o elevado número de equipamentos que nele se baseiam: motores a relutância, instrumentos de medição do tipo ferro móvel, etc.

1.5 MÁQUINA ELEMENTAR ROTATIVA COM 2 ENROLAMENTOS. TORQUE DE EXCITAÇÃO

Considerando a máquina elementar representada na Fig. 1.10. Admitindo que os dois enrolamentos **S** e **R** estejam situados sobre peças cilíndricas de sorte que as

suas indutâncias próprias sejam independentes da posição. Em tal estrutura, somente a indutância mútua entre os dois enrolamentos depende da posição.

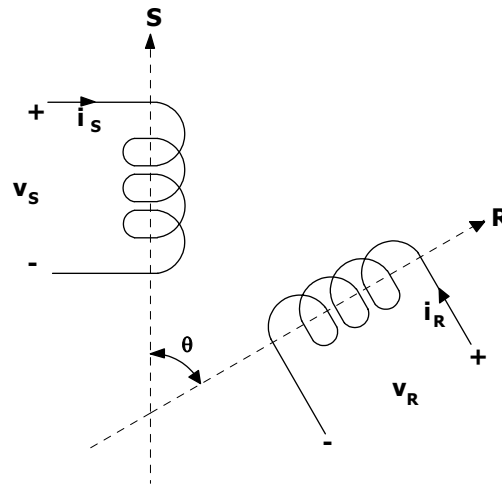


Fig. 1.10 – Representação física de máquina elementar relativa de dois enrolamentos.

As equações elétricas deste sistema, estabelecidas por inspeção estão representadas a seguir:

$$v_S = R_S i_S + \frac{d(L_S i_S)}{dt} + \frac{d(M_{SR}(\theta) i_R)}{dt} \quad (1.41)$$

$$v_R = R_R i_R + \frac{d(L_R i_R)}{dt} + \frac{d(M_{SR}(\theta) i_S)}{dt} \quad (1.42)$$

L_S e L_R são as indutâncias próprias.

M_{SR} é a indutância mútua existente entre os enrolamentos.

Desenvolvendo-se as expressões (1.41) e (1.42), obtém-se as expressões (1.43) e (1.44).

$$v_S = R_S i_S + L_S \frac{di_S}{dt} + i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) \frac{di_R}{dt} \quad (1.43)$$

$$v_R = R_R i_R + L_R \frac{di_R}{dt} + i_S \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) \frac{di_S}{dt} \quad (1.44)$$

Multiplicando-se a expressão (1.43) por i_S e (1.44) por i_R , obtém-se as expressões (1.45) e (1.46).

$$P_S = v_S i_S = R_S i_S^2 + L_S i_S \frac{di_S}{dt} + i_R i_S \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) i_S \frac{di_R}{dt} \quad (1.45)$$

$$P_R = v_R i_R = R_R i_R^2 + L_R i_R \frac{di_R}{dt} + i_S i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) i_R \frac{di_S}{dt} \quad (1.46)$$

P_S e P_R representam as potências instantâneas fornecidas pelas fontes dos enrolamentos.

A potência total será:

$$P = P_R + P_S \quad (1.47)$$

Assim:

$$P = R_S i_S^2 + L_S i_S \frac{di_S}{dt} + i_R i_S \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) i_S \frac{di_R}{dt} + R_R i_R^2 + L_R i_R \frac{di_R}{dt} + i_S i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) i_R \frac{di_S}{dt} \quad (1.48)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_S i_S^2 + \frac{1}{2} L_R i_R^2 + M_{SR}(\theta) i_S i_R \right) = \\ & = L_S i_S \frac{di_S}{dt} + L_R i_R \frac{di_R}{dt} + M_{SR}(\theta) i_S \frac{di_R}{dt} + M_{SR}(\theta) i_R \frac{di_S}{dt} + \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} i_S i_R \end{aligned} \quad (1.49)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} & L_S i_S \frac{di_S}{dt} + L_R i_R \frac{di_R}{dt} + M_{SR}(\theta) i_S \frac{di_R}{dt} + M_{SR}(\theta) i_R \frac{di_S}{dt} + 2 i_S i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} = \\ & = \frac{d \left(\frac{1}{2} L_S i_S^2 + \frac{1}{2} L_R i_R^2 + M_{SR}(\theta) i_S i_R \right)}{dt} + \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} i_S i_R \end{aligned} \quad (1.50)$$

Portanto a potência total passa a ser representada pela expressão (1.51):

$$P = R_S i_S^2 + R_R i_R^2 + \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} i_S i_R + \frac{d \left(\frac{1}{2} L_S i_S^2 + \frac{1}{2} L_R i_R^2 + M_{SR}(\theta) i_S i_R \right)}{dt} \quad (1.51)$$

Seja:

$$P_r = R_s i_s^2 + R_r i_r^2 \quad (1.52)$$

$$P_L = \frac{d\left(\frac{1}{2}L_s i_s^2 + \frac{1}{2}L_r i_r^2 + M_{SR}(\theta) i_s i_r\right)}{dt} \quad (1.53)$$

P_r representa a potência dissipada nos resistores.

P_L representa a potência acumulada no campo magnético.

Assim:

$$P_{mec} = \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} i_s i_r \quad (1.54)$$

P_{mec} representa a quantidade de potência elétrica convertida em potência mecânica. Isto decorre do fato que a potência fornecida é igual à potência dissipada, mais a potência acumulada, mais a potência convertida.

Por outro lado:

$$P_{mec} = T \frac{d\theta}{dt} \quad (1.55)$$

Assim:

$$T \frac{d\theta}{dt} = \frac{dM_{SR}(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} i_s i_r \quad (1.56)$$

Então a expressão do torque será:

$$T = i_s i_r \frac{dM_{SR}(\theta)}{d\theta} \quad (1.57)$$

A expressão (1.57) traduz o fato de que há torque eletromagnético se a indutância mútua variar com o deslocamento angular.

O torque originado pela variação de indutância mútua é denominado torque de excitação. É ele que explica o funcionamento da maior parte das máquinas elétricas,

como o motor de indução, o motor síncrono com excitação e o motor de corrente contínua.

A indutância mútua entre os enrolamentos representados na Fig. 1.10, pode ser estabelecida de diversas maneiras. A simples inspeção indica que ela é máxima para $\theta = 0$, nula para $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ e mínima para $\theta = \pi$. A sua variação pode então ser representada graficamente segundo Fig. 1.11.

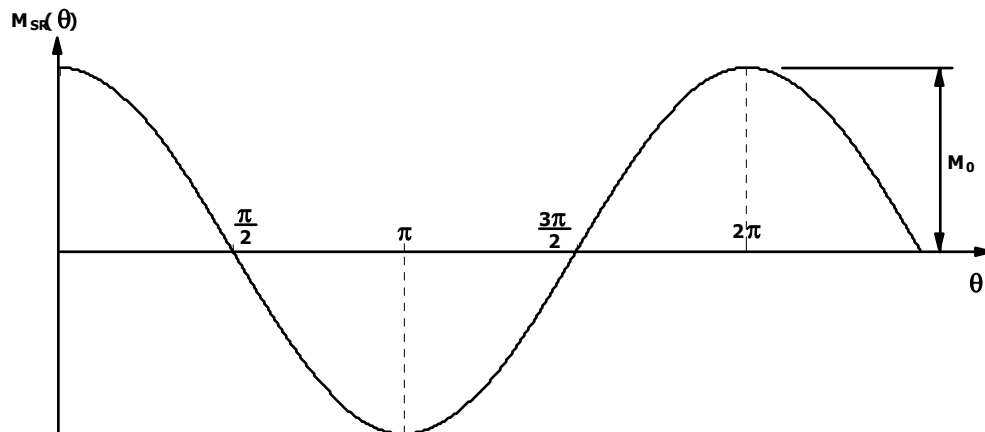


Fig. 1.11 – Variação da indutância mútua entre os enrolamentos em função de θ .

É possível representá-la com boa precisão pela expressão (1.58).

$$M_{SR}(\theta) = M_0 \cos \theta \quad (1.58)$$

Portanto o torque, em módulo, fica representado pela expressão (1.59).

$$T = M_0 i_s i_R \sin \theta \quad (1.59)$$

A representação gráfica é mostrada na Fig. 1.12:

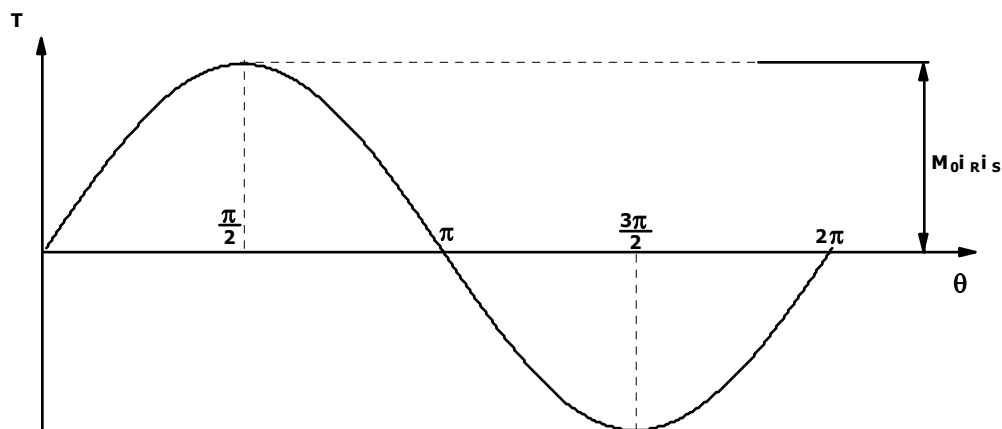


Fig. 1.12 – Variação do torque em função do ângulo θ .

Com as informações até aqui conseguidas, podemos estabelecer o modelo completo do sistema em questão. Basta para isto agrupar as equações elétrica e mecânica.

Seja:

$$T = T_e + T_a + T_i \quad (1.60)$$

Assim o modelo completo é representado pelas expressões (1.61), (1.62) e (1.63):

$$T_e = i_s i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{d\theta} - D \frac{d\theta}{dt} - J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1.61)$$

$$v_S = R_S i_S + L_S \frac{di_S}{dt} + i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) \frac{di_R}{dt} \quad (1.62)$$

$$v_R = R_R i_R + L_R \frac{di_R}{dt} + i_S \frac{dM_{SR}(\theta)}{dt} + M_{SR}(\theta) \frac{di_S}{dt} \quad (1.63)$$

A máquina possui como variáveis independentes, v_S , v_R e T_e . Como variáveis dependentes as correntes i_S , i_R e o deslocamento angular θ .

A representação em bloco está mostrada na Fig. 1.13.



Fig. 1.13 – Representação da máquina elétrica elementar de dois enrolamentos com as variáveis de entrada e saída.

1.6 MÁQUINA ELEMENTAR ROTATIVA COM 2 ENROLAMENTOS. ROTOR COM PÓLOS SALIENTES

Consideremos a máquina elementar representada na Fig. 1.14. A indutância própria do enrolamento estático e a mútua entre os dois enrolamentos dependem do ângulo θ .

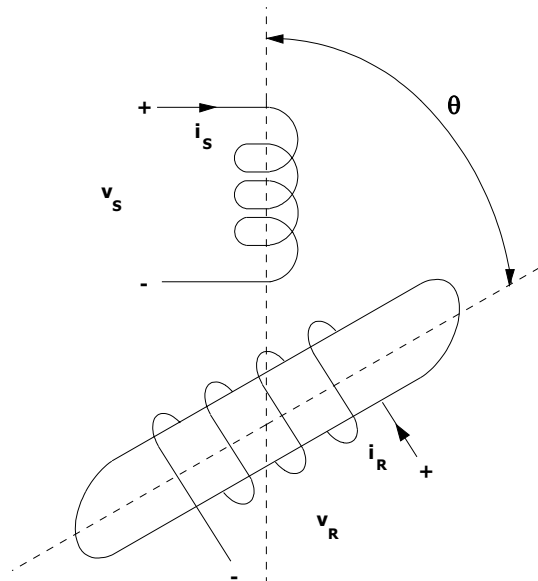


Fig. 1.14 – Representação física da máquina elétrica elementar de dois enrolamentos de pólos salientes.

Como já foi demonstrado, o torque de excitação é obtido pela expressão (1.64):

$$T_{\text{exc}} = i_s i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{d\theta} \quad (1.64)$$

O torque de relutância é representado pela expressão (1.65):

$$T_R = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (1.65)$$

O torque total produzido pela máquina será a soma dos torques de relutância e de excitação. É representado pela expressão (1.66):

$$T = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_S(\theta)}{d\theta} + i_s i_R \frac{dM_{SR}(\theta)}{d\theta} \quad (1.66)$$

Considerando a variação de L_S e M_{SR} em função de θ representada pelas expressões (1.67) e (1.68):

$$L_s(\theta) = L_M \cos 2\theta + L_0 \quad (1.67)$$

$$M_{SR}(\theta) = M_0 \cos \theta \quad (1.68)$$

Obtém-se:

$$T = L_m i_s^2 \sin 2\theta + M_0 i_s i_R \sin \theta \quad (1.69)$$

A máquina síncrona de pólos salientes possui torque de relutância e excitação e é um bom exemplo de máquina cujo comportamento é traduzido por uma expressão com a forma da expressão (1.69).

1.7 MÁQUINA COM TRÊS ENROLAMENTOS

Os resultados até aqui obtidos serão estendidos para uma máquina de três enrolamentos. Neste caso o modelo é representado pelas equações (1.70) à (1.73).

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{d(L_1 i_1)}{dt} + \frac{d(M_{12} i_2)}{dt} + \frac{d(M_{13} i_3)}{dt} \quad (1.70)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{d(M_{12} i_1)}{dt} + \frac{d(L_2 i_2)}{dt} + \frac{d(M_{23} i_3)}{dt} \quad (1.71)$$

$$v_3 = R_3 i_3 + \frac{d(M_{13} i_1)}{dt} + \frac{d(M_{23} i_2)}{dt} + \frac{d(L_3 i_3)}{dt} \quad (1.72)$$

$$T = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} i_3^2 \frac{dL_3(\theta)}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} + i_1 i_3 \frac{dM_{13}(\theta)}{d\theta} + i_2 i_3 \frac{dM_{23}(\theta)}{d\theta} \quad (1.73)$$

Pode-se compactar as expressões precedentes, usando-se a notação matricial, As equações elétricas passam a ser representadas pela expressão (1.74).

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

Vamos em seguida reescrever a equação do torque:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \left[i_1 \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + i_1 \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} + i_1 \frac{dM_{13}(\theta)}{d\theta} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[i_2 \frac{dM_{12}(\theta)}{d\theta} + i_2 \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} + i_2 \frac{dM_{23}(\theta)}{d\theta} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{1}{2} \left[i_3 \frac{dM_{13}(\theta)}{d\theta} + i_3 \frac{dM_{23}(\theta)}{d\theta} + i_3 \frac{dL_3(\theta)}{d\theta} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.75}$$

A expressão (1.75) pode ainda ser representada segundo a expressão (1.76):

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dL_1}{d\theta} & \frac{dM_{12}}{d\theta} & \frac{dM_{13}}{d\theta} \\ \frac{dM_{12}}{d\theta} & \frac{dL_2}{d\theta} & \frac{dM_{23}}{d\theta} \\ \frac{dM_{13}}{d\theta} & \frac{dM_{23}}{d\theta} & \frac{dL_3}{d\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \tag{1.76}$$

Seja:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \tag{1.77}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \tag{1.78}$$

$$\mathbf{i}^t = [i_1 \quad i_2 \quad i_3] \tag{1.79}$$

$$\frac{d\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{dL_1}{d\theta} & \frac{dM_{12}}{d\theta} & \frac{dM_{13}}{d\theta} \\ \frac{dM_{12}}{d\theta} & \frac{dL_2}{d\theta} & \frac{dM_{23}}{d\theta} \\ \frac{dM_{13}}{d\theta} & \frac{dM_{23}}{d\theta} & \frac{dL_3}{d\theta} \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

Assim, o torque passa a ser representado pela expressão (1.82). As tensões são representadas pela expressão (1.81):

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{dt} \mathbf{i} \quad (1.81)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{d\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{d\theta} \mathbf{i} \quad (1.82)$$

As expressões (1.81) e (1.82) foram estabelecidas para uma máquina com três enrolamentos. Contudo podem ser empregadas para qualquer sistema onde exista conversão eletromecânica de energia.

1.8 CONCLUSÕES

Pode-se sintetizar os resultados obtidos no desenvolvimento deste capítulo, do seguinte modo:

- (a) O deslocamento relativo das partes de um sistema implica em conversão eletromecânica de energia, quando há indutâncias próprias ou mútuas, desse sistema, que sofrem variação com o deslocamento.
- (b) A representação matricial dos sistemas nos quais ocorre conversão eletromecânica de energia leva a obtenção de modelos compactos de fácil interpretação física e de fácil manuseio.

1.9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

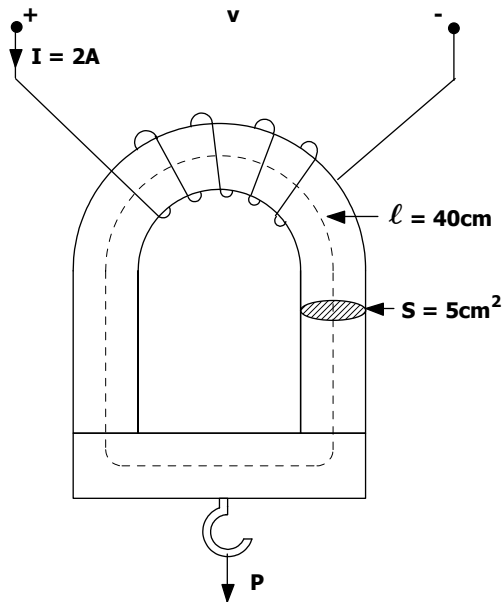


Fig. 1.15 – Representação física do eletroímã do problema 1.

1) Um eletroímã de manutenção tem uma secção reta uniforme de 5cm^2 e um comprimento total médio de 40cm (incluindo a armadura). O enrolamento é excitado por uma corrente de 2A ; supõe-se que o núcleo e a armadura possuem a mesma permeabilidade. A permeabilidade relativa (μ_r) é igual a 2500 . Calcular o número de espiras necessário para resistir a uma massa de 50kg . (Fig. 1.15)

2) O relé mostrado na Fig. 1.16 tem uma armadura móvel de secção quadrada, com lado d , guiado por dois suportes não magnéticos de espessura q e comprimento $d/2$. A carcaça é excitada por duas bobinas percorridas pela mesma corrente i . Cada bobina possui N espiras. Supõe-se que a carcaça e a armadura possuem permeabilidade infinita.

- Calcular a indutância do relé em função de x .
- Calcular a força eletromagnética que atua sobre a armadura, em função de i e x .
- Calcular a força quando o relé está “colado”.
- Fazer uma aplicação numérica para $d = 4\text{cm}$; $g = 0,1\text{cm}$, $N = 1000$ e $i = 0,5\text{A}$

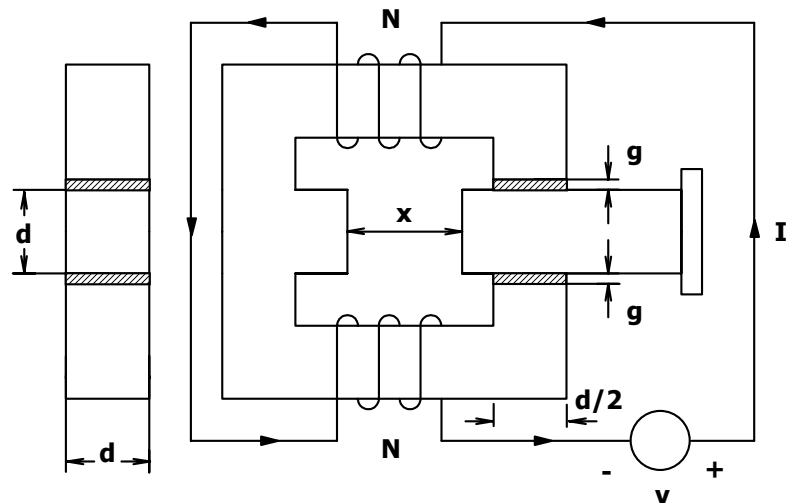


Fig. 1.16 – Representação física do relé do problema 2.

3) Na Fig. 1.17 está representada uma peça de aço, de massa M , suspensa por uma mola de constante K (N/m) e submetida a influência de uma bobina cuja resistência é desprezível. Supõe-se que a indutância da bobina varia em função da posição x da massa, segundo a expressão $L(x) = A + Bx$, sendo A e B constantes.

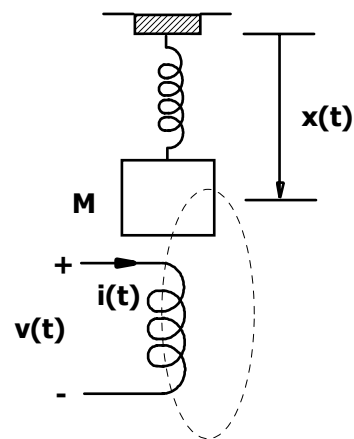


Fig. 1.17 – Representação física do problema 3.

- Escrever a equação elétrica do sistema, estabelecendo a tensão $V(t)$ em função de $i(t)$ e de $x(t)$.
- Calcular a força eletromagnética que atua sobre a massa M .
- Obter a equação diferencial mecânica do sistema.

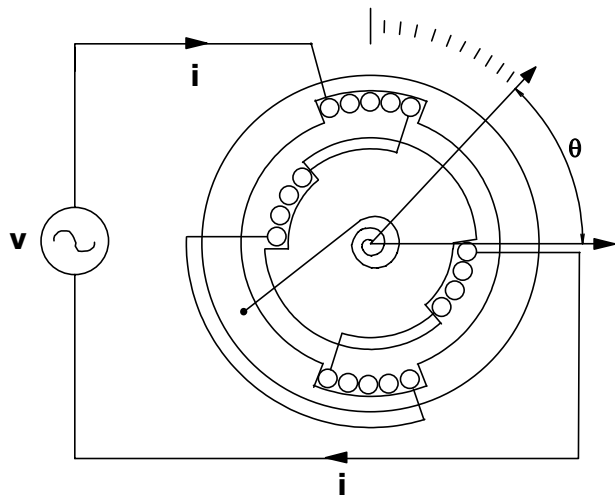


Fig. 1.18 – Instrumento do tipo bobina móvel.

4) Na Fig. 1.18, as duas bobinas são ligadas eletricamente em série; uma está alojada no estator fixo e a outra no rotor móvel. As indutâncias próprias e mútuas valem:

$$L_1 = 0,2\text{mH},$$

$$L_2 = 0,1\text{mH},$$

$$L_3 = 0,05\cos \theta \text{ mH}$$

As duas bobinas são percorridas por uma corrente senoidal de valor eficaz igual a 5A ($i = \sqrt{2} 5 \text{ sen } \omega t$).

- Calcular o valor médio do torque eletromagnético exercido sobre a bobina móvel em função de θ .
- Supor que a bobina móvel seja mantida no ângulo $\theta = 90^\circ$, por ação de uma mola espiral que exerce um torque dado pela expressão $T = K(\theta - \pi/2)$ com $K = 0,004\text{J/rd}^2$. Calcular o valor do ângulo “ θ ” de equilíbrio em graus.

5) Considere a Fig. 1.19. O ferro-móvel pode sofrer deslocamento na direção x. Ao se deslocar sofre a ação da mola, cuja constante é K_s . A posição do ferro-móvel em relação ao ferro-fixado é D, quando não há corrente no enrolamento. A massa do ferro-móvel é M. O atrito é por hipótese nulo. Efeitos secundários, como dispersão de fluxo são ignorados. O enrolamento possui N espiras e resistência elétrica nula.

O enrolamento é alimentado por uma fonte tal que a densidade de fluxo no entreferro é dada por $B(t) = B_m \text{ sen } \omega t$.

- Encontrar a expressão da força eletromagnética exercida sobre o ferro-móvel em função de B_m , ω e t.
- Escrever a equação da tensão de alimentação do enrolamento em função de B_m , ω e t.

- (c) Obter a equação diferencial mecânica do sistema em termos de B_m , ω e t .

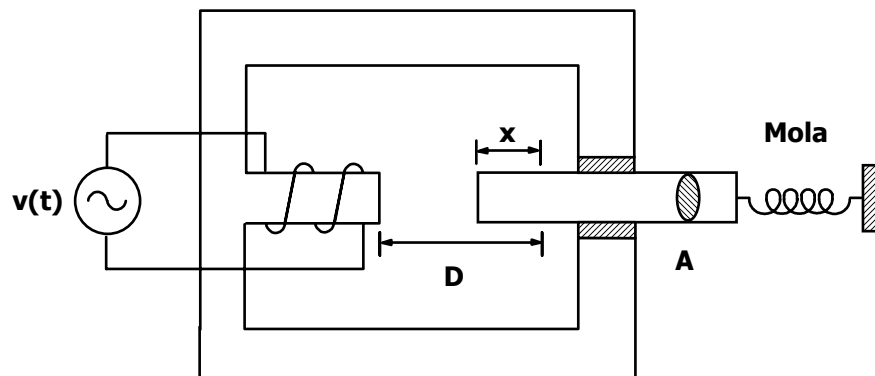


Fig. 1.19 – Instrumento do tipo ferro-móvel.

6) Seja a estrutura representada a seguir:

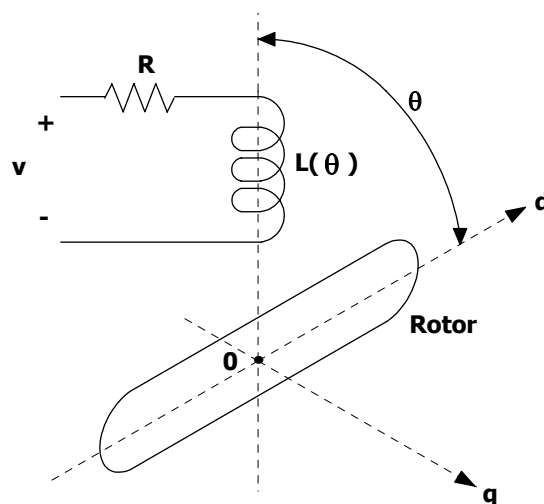


Fig. 1.20 – Máquina elétrica elementar com um enrolamento.

- Obter a expressão geral do torque.
- Explicar fisicamente a origem do torque.
- Seja $L(\theta) = L_m \cos 2\theta + L_0$. Obter a expressão final do torque.
- Estabelecer o modelo completo para o estudo do comportamento dinâmico da estrutura.