CAPÍTULO

10

MODELO DO MOTOR DE INDUÇÃO PARA PEQUENAS PERTUBAÇÕES

10.1 INTRODUÇÃO

No capítulo VII foi estabelecido um método para estudo da resposta do motor de indução submetido a perturbações no torque, baseado no fato de que nos motores normais a constante de tempo mecânica é muito maior que as constantes tempo elétricas. Naquela situação, o emprego das equações elétricas de regime permanente para obtenção das correntes e do torque elétrico levava a resultados suficientemente precisos na análise do transitório de partida e das respostas à pequenas perturbações na região normal de operação.

Contudo, quando se trata de máquinas de momentos de inércia baixos, como aqueles destinados a sistemas de controle, tais aproximações não podem ser feitas, pois conduzem a erros não aceitáveis.

Neste capítulo serão estabelecidos modelos linearizados destinados a estabelecer a resposta dos motores de indução submetidos a perturbações no torque de carga ou na tensão de alimentação de pequenas amplitudes, capazes de representar satisfatoriamente os motores de baixa inércia.

10.2 OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES

Como modelo inicial será empregado aquele obtido através da transformação de PARK, representado pelas expressões (10.1) e (10.2).

Será utilizado o referencial colocado no campo girante. Com isto, para tensões de alimentação senoidal, obtém-se valores iniciais das tensões e das correntes com maior facilidade, por serem constantes.

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ \hline v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} R_S + p\mathbb{L}_S & -\mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & pm_{SR} & -m_{SR} \dot{\Psi} n \\ \mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & R_S + p\mathbb{L}_S & m_{SR} \dot{\Psi} n & pm_{SR} \\ \hline pm_{SR} & -m_{SR}\left(\dot{\Psi} - \dot{\theta}\right)n & R_R + p\mathbb{L}_R & -n\left(\dot{\Psi} - \dot{\theta}\right)\mathbb{L}_R \\ m_{SR}\left(\dot{\Psi} - \dot{\theta}\right)n & pm_{SR} & n\left(\dot{\Psi} - \dot{\theta}\right)\mathbb{L}_R & R_R + p\mathbb{L}_R \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ \hline i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \qquad (10.1)$$

$$T = nm_{SR}\left(i_{S_q} i_{R_d} - i_{S_d} i_{R_q}\right) \qquad (10.2)$$

A expressão mecânica é representada pela expressão (10.3).

$$T = Jp\dot{\theta} + D\dot{\theta} + T_L \qquad (10.3)$$

Normalmente o torque de atrito será desconsiderado. Assim:

$$T_L = -Jp\dot{\theta} + nm_{SR}\left(i_{S_q} i_{R_d} - i_{S_d} i_{R_q}\right) \qquad (10.4)$$

A expressão (10.1) é reescrita segundo a expressão (10.5).

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ri} + p\mathbf{L_1 i} + \omega_S \mathbf{L_2 i} + n\dot{\theta}\mathbf{L_3 i} \qquad (10.5)$$

onde:

$\omega_S = n\dot{\Psi}$ (pulsação da alimentação)

$\dot{\Psi}$ = velocidade do referencial igual à velocidade síncrona.

Sendo:

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{cc|cc} R_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_R \end{array}\right] \qquad (10.6)$$

$$\mathbf{L_1} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} \\ \hline m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R \end{array}\right] \tag{10.7}$$

$$\mathbf{L_2} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -\mathbb{L}_S & 0 & -m_{SR} \\ \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} & 0 \\ \hline 0 & -m_{SR} & 0 & -\mathbb{L}_R \\ m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \end{array}\right] \tag{10.8}$$

$$\mathbf{L_3} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R \\ -m_{SR} & 0 & -\mathbb{L}_R & 0 \end{array}\right] \tag{10.9}$$

Consideremos o motor inicialmente em regime permanente com velocidade constante. Uma perturbação é introduzida no torque de carga ou nas tensões de alimentação. As equações (10.5) tornam-se:

$$(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) = \mathbf{R}(\mathbf{i} + \Delta\mathbf{i}) + p\mathbf{L_1}(\mathbf{i} + \Delta\mathbf{i}) + \omega_S \mathbf{L_2}(\mathbf{i} + \Delta\mathbf{i}) + n\left(\dot{\theta} + \Delta\dot{\theta}\right)\mathbf{L_3}(\mathbf{i} + \Delta\mathbf{i}) \tag{10.10}$$

Desenvolvendo a expressão (10.10) obtém-se:

$$\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{Ri} + \mathbf{R}\Delta\mathbf{i} + p\mathbf{L_1 i} + p\mathbf{L_1}\Delta\mathbf{i} + \omega_S\mathbf{L_2 i} + \omega_S\mathbf{L_2}\Delta\mathbf{i} + n\dot{\theta}\mathbf{L_3 i} + n\dot{\theta}\mathbf{L_3}\Delta\mathbf{i} + n\Delta\dot{\theta}\mathbf{L_3 i} + n\Delta\dot{\theta}\mathbf{L_3}\Delta\mathbf{i} \tag{10.11}$$

Subtraindo-se a expressão (10.11) da expressão (10.5) e anulando-se os produtos de segunda ordem obtém-se:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{R}\Delta\mathbf{i} + p\mathbf{L_1}\Delta\mathbf{i} + \omega_S\mathbf{L_2}\Delta\mathbf{i} + n\dot{\theta}_0\mathbf{L_3}\Delta\mathbf{i} + n\Delta\dot{\theta}\mathbf{L_3 i_0} \tag{10.12}$$

onde:

$\dot{\theta}_0$ = velocidade inicial do motor.

$\mathbf{i_0}$ = correntes iniciais do motor.

Assim:

$$\Delta\mathbf{v}=\left(\mathbf{R}+p\mathbf{L_1}+\omega_S\mathbf{L_2}+n\dot{\theta}_\mathbf{0}\,\mathbf{L_3}\right)\Delta\mathbf{i}+n\Delta\dot{\theta}\,\mathbf{L_3}\mathbf{i_0} \tag{10.13}$$

O mesmo procedimento será adotado para o torque.

$$T_L=-Jp\dot{\theta}+Te \tag{10.14}$$

$$T_L+\Delta T_L=-Jp\left(\dot{\theta}+\Delta\dot{\theta}\right)+Te+\Delta Te \tag{10.15}$$

Assim:

$$\Delta T_L=-Jp\Delta\dot{\theta}+\Delta Te \tag{10.16}$$

Calculemos o torque ΔTe.

$$Te=nm_{SR}\left(i_{S_q}i_{R_d}-i_{S_d}i_{R_q}\right) \tag{10.17}$$

$$Te+\Delta Te=nm_{SR}\left(\left(i_{S_q}+\Delta i_{S_q}\right)\left(i_{R_d}+\Delta i_{R_d}\right)-\left(i_{S_d}+\Delta i_{S_d}\right)\left(i_{R_q}+\Delta i_{R_q}\right)\right) \tag{10.18}$$

Assim:

$$\Delta Te=nm_{SR}\left(i_{S0_q}\Delta i_{R_d}-i_{S0_d}\Delta i_{R_q}+i_{R0_d}\Delta i_{S_q}-i_{R0_q}\Delta i_{S_d}\right) \tag{10.19}$$

onde i_{S0_q}, i_{S0_d}, i_{R0_q} e i_{R0_d} representam as correntes iniciais.

Levando-se a expressão (10.19) na expressão (10.16), obtém-se a expressão (10.20).

$$\Delta T_L=-Jp\Delta\dot{\theta}+nm_{SR}\left(i_{S0_q}\Delta i_{R_d}-i_{S0_d}\Delta i_{R_q}+i_{R0_d}\Delta i_{S_q}-i_{R0_q}\Delta i_{S_d}\right) \tag{10.20}$$

Reunindo-se as equações (10.13) e (10.20), obtém-se as equações .

$$\begin{bmatrix} \Delta v_{S_d} \\ \hline \Delta v_{S_q} \\ \hline \Delta v_{R_d} \\ \hline \Delta v_{R_q} \\ \hline \Delta T_L \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} R_S + p\mathbb{L}_S & -\omega_S \mathbb{L}_S & p m_{SR} & -\omega_S m_{SR} & 0 \\ \hline \omega_S \mathbb{L}_S & R_S + p\mathbb{L}_S & \omega_S m_{SR} & p m_{SR} & 0 \\ \hline p m_{SR} & -m_{SR}\left(\omega_S - n\dot{\theta}_0\right) & R_R + p\mathbb{L}_R & -\mathbb{L}_R\left(\omega_S - n\dot{\theta}_0\right) & \begin{array}{c} n m_{SR} i_{S0_q} + \\ + n\mathbb{L}_R i_{R0_q} \end{array} \\ \hline m_{SR}\left(\omega_S - n\dot{\theta}_0\right) & p m_{SR} & \mathbb{L}_R\left(\omega_S - n\dot{\theta}_0\right) & R_R + p\mathbb{L}_R & -\left(\begin{array}{c} n m_{SR} i_{S0_d} + \\ + n\mathbb{L}_R i_{R0_d} \end{array}\right) \\ \hline -n m_{SR} i_{R0_q} & n m_{SR} i_{R0_d} & n m_{SR} i_{S0_q} & -n m_{SR} i_{S0_d} & -Jp \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta i_{S_d} \\ \hline \Delta i_{S_q} \\ \hline \Delta i_{R_d} \\ \hline \Delta i_{R_q} \\ \hline \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Seja:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_{S_d} \\ \hline \Delta v_{S_q} \\ \hline \Delta v_{R_d} \\ \hline \Delta v_{R_q} \end{bmatrix} \tag{10.22}$$

$$\Delta \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \Delta i_{S_d} \\ \hline \Delta i_{S_q} \\ \hline \Delta i_{R_d} \\ \hline \Delta i_{R_q} \end{bmatrix} \tag{10.23}$$

$$\mathbf{Z}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} R_S & -\omega_S \mathbb{L}_S & 0 & -\omega_S m_{SR} \\ \omega_S \mathbb{L}_S & R_S & \omega_S m_{SR} & 0 \\ \hline 0 & -\omega_{R_0} m_{SR} & R_R & -\omega_{R_0} \mathbb{L}_R \\ \omega_{R_0} m_{SR} & 0 & \omega_{R_0} \mathbb{L}_R & R_R \end{array}\right] \tag{10.24}$$

$$\omega_{R_0} = \omega_S - n\dot{\theta} \tag{10.25}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} -n m_{SR} i_{R0_q} & n m_{SR} i_{R0_d} & n m_{SR} i_{S0_q} & -n m_{SR} i_{S0_d} \end{bmatrix} \tag{10.26}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n m_{SR} i_{S0_q} + n\mathbb{L}_R i_{R0_q} \\ -\left(n m_{SR} i_{S0_d} + n\mathbb{L}_R i_{R0_d}\right) \end{bmatrix} \tag{10.27}$$

$$\mathbf{Z}_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} \\ \hline m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R \end{array}\right] \tag{10.28}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \hline \Delta T_L \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_3 \\ \hline \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} + p \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_4 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & -J \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{10.29}$$

As equações (10.29) representam o motor nas situaçòes em que o torque de carga T_L ou as tensões de alimentação sofrem perturbações de pequenas amplitudes. O modelo é linear e útil no estudo da estabilidade local do motor de indução.

Vamos em seguida representar o modelo (10.29) segundo a expressão (10.30).

$$p\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \tag{10.30}$$

Isolando-se a esquerda do sinal de igualdade o termo que contém o símbolo de derivação encontramos a expressão (10.31).

$$p \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_4 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & -J \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \hline \Delta T_L \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_3 \\ \hline \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{10.31}$$

Assim:

$$p \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_4^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & -\frac{1}{J} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \hline \Delta T_L \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_4^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & -\frac{1}{J} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_3 \\ \hline \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{10.32}$$

$$p \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_4^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & -\frac{1}{J} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \hline \Delta T_L \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Z}_4^{-1}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_4^{-1}\mathbf{Z}_3 \\ \hline -\frac{\mathbf{Z}_2}{J} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i} \\ \hline \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{10.33}$$

As equações (10.33) estão na forma de estado e são úteis na realização de vários estudos inclusive de estabilidade do motor.

Nas perturbações usuais as tensões estatóricas permanecem constantes enquanto que as tensões rotóricas se mantém nulas. Nestes casos $\Delta\mathbf{v} = 0$. O modelo passa a ser representado pela equação (10.34).

$$p\left[\begin{array}{c}\Delta\mathbf{i}\\ \hline \Delta\dot{\theta}\end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{Z}_4^{-1}\mathbf{Z}_1 & -\mathbf{Z}_4^{-1}\mathbf{Z}_3 \\ \hline \dfrac{\mathbf{Z}_2}{J} & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\Delta\mathbf{i}\\ \hline \Delta\dot{\theta}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \dfrac{\Delta T_L}{J}\end{array}\right] \tag{10.34}$$