

2.1 INTRODUÇÃO

A máquina de indução trifásica com rotor bobinado é simétrica. Apresenta estruturas magnéticas cilíndricas tanto no rotor quanto no estator. Os enrolamentos, tanto do rotor quanto do estator são iguais entre si e igualmente defasados.

A máquina de indução com rotor em gaiola também é simétrica, pelas mesmas razões expostas. Porém o número de fases do rotor é superior a três. De fato, cada barra da gaiola constitui uma fase.

Neste capítulo será modelada apenas a máquina trifásica, porém sem perda de generalidade. O método pode ser empregado para qualquer número de fases e conseqüentemente para o rotor em gaiola.

Um desenho ilustrativo da máquina simétrica trifásica está representado na Fig. 2.1.

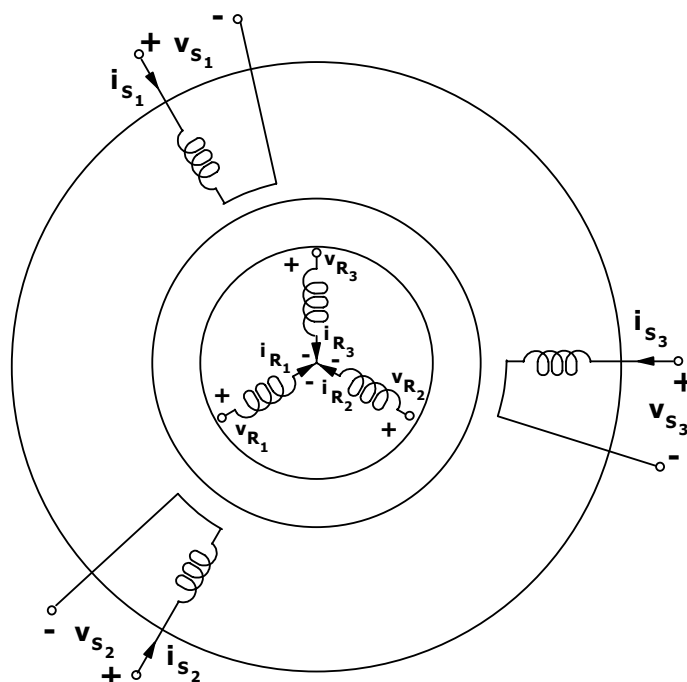


Fig. 2.1 – Representação da máquina simétrica trifásica.

2.2 HIPÓTESES DE ESTUDO E CONVENÇÕES

Para que se possa representar matematicamente a máquina em estudo, serão feitas algumas hipóteses simplificativas, sem as quais a formulação, se não se tornasse impossível, tornar-se-ia extremamente complexa.

A) Hipóteses de estudo e conseqüências:

- (a) Os três enrolamentos estatóricos são iguais entre si.
- (b) Os três enrolamentos rotóricos são iguais entre si.
- (c) Os ângulos elétricos entre os enrolamentos são iguais, tanto no estator quanto no rotor.
- (d) O entreferro é considerado constante.
- (e) O circuito magnético é considerado ideal. A saturação não existe.
- (f) A distribuição da densidade de fluxo magnético no entreferro é radial e senoidal.
- (g) A máquina será considerada bipolar.
- (h) Não serão consideradas as perdas magnéticas.

Como conseqüência das hipóteses de estudo adotadas, podemos estabelecer que:

- (a) Os fluxos podem ser superpostos. Assim:

$$\phi_{\text{total}} = \sum_{i=1}^3 \phi_{R_i} + \sum_{i=1}^3 \phi_{S_i} \quad (2.1)$$

sendo ϕ_{R_i} o fluxo produzido pelo enrolamento “i” do rotor e ϕ_{S_i} o fluxo produzido pelo enrolamento “i” do estator.

(b) os enrolamentos do estator e do rotor possuem indutâncias próprias constantes. Assim:

L_{S_1} , L_{S_2} , L_{S_3} , L_{R_1} , L_{R_2} e L_{R_3} são constantes.

(c) como consequência da igualdade dos enrolamentos tem-se:

$$L_{S_1} = L_{S_2} = L_{S_3} = L_S$$

$$L_{R_1} = L_{R_2} = L_{R_3} = L_R$$

$$R_{S_1} = R_{S_2} = R_{S_3} = R_S$$

$$R_{R_1} = R_{R_2} = R_{R_3} = R_R$$

(d) como consequência do defasamento igual entre os enrolamentos tem-se:

$$M_{S_{12}} = M_{S_{23}} = M_{S_{13}} = M_S$$

$$M_{R_{12}} = M_{R_{23}} = M_{R_{13}} = M_R$$

onde:

M_S = indutância mútua entre dois enrolamentos do estator

M_R = indutância mútua entre dois enrolamentos do rotor

(e) as indutâncias mútuas entre os enrolamentos estatóricos e rotóricos são funções senoidais do deslocamento angular θ . Os enrolamentos do estator e do rotor estão representados simbolicamente na Fig. 2.2:

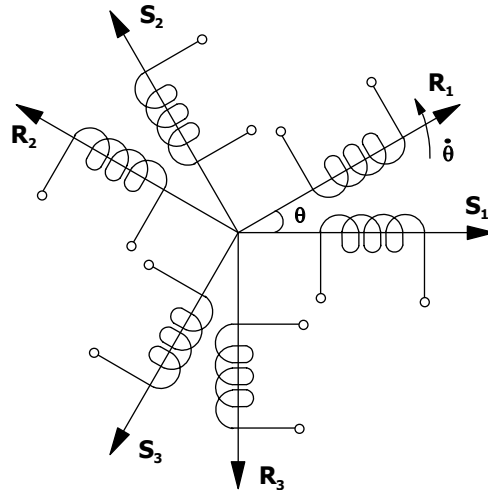


Fig. 2.2 – Representação simbólica dos enrolamentos do estator e do rotor.

$$\begin{aligned}
 M_{S_1R_1} &= M_{SR} \cos \theta \\
 M_{S_1R_2} &= M_{SR} \cos(\theta + 2\pi/3) \\
 M_{S_1R_3} &= M_{SR} \cos(\theta + 4\pi/3)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 M_{S_2R_1} &= M_{SR} \cos(\theta + 4\pi/3) \\
 M_{S_2R_2} &= M_{SR} \cos \theta \\
 M_{S_2R_3} &= M_{SR} \cos(\theta + 2\pi/3)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
 M_{S_3R_1} &= M_{SR} \cos(\theta + 2\pi/3) \\
 M_{S_3R_2} &= M_{SR} \cos(\theta + 4\pi/3) \\
 M_{S_3R_3} &= M_{SR} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

B) Convenções:

A máquina será tratada como um receptor e as equações das tensões terão a forma representada pela expressão (2.5)

$$v_a = R_a i_a + \frac{d\phi_a}{dt} \tag{2.5}$$

onde ϕ representa o fluxo total que envolve o enrolamento “a”.

2.3 EQUAÇÕES DOS FLUXOS

Adotando a superposição, os fluxos estatóricos serão descritos pelas expressões (2.6), (2.7) e (2.8).

$$\phi_{S_1} = L_S i_{S_1} + M_S i_{S_2} + M_S i_{S_3} + M_{S_1 R_1} i_{R_1} + M_{S_1 R_2} i_{R_2} + M_{S_1 R_3} i_{R_3} \quad (2.6)$$

$$\phi_{S_2} = L_S i_{S_2} + M_S i_{S_1} + M_S i_{S_3} + M_{S_2 R_1} i_{R_1} + M_{S_2 R_2} i_{R_2} + M_{S_2 R_3} i_{R_3} \quad (2.7)$$

$$\phi_{S_3} = L_S i_{S_3} + M_S i_{S_1} + M_S i_{S_2} + M_{S_3 R_1} i_{R_1} + M_{S_3 R_2} i_{R_2} + M_{S_3 R_3} i_{R_3} \quad (2.8)$$

Representando-se as equações (2.6), (2.7) e (2.8) matricialmente, obtém-se a equação (2.9):

$$\begin{bmatrix} \phi_{S_1} \\ \phi_{S_2} \\ \phi_{S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_S & M_S & M_S \\ M_S & L_S & M_S \\ M_S & M_S & L_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_1} \\ i_{S_2} \\ i_{S_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{S_1 R_1} & M_{S_1 R_2} & M_{S_1 R_3} \\ M_{S_2 R_1} & M_{S_2 R_2} & M_{S_2 R_3} \\ M_{S_3 R_1} & M_{S_3 R_2} & M_{S_3 R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_1} \\ i_{R_2} \\ i_{R_3} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Generalizando-se para os enrolamentos rotóricos e compactando-se a representação obtém-se as expressões (2.10):

$$\begin{aligned} \phi_S &= L_{SS} i_S + L_{SR}(\theta) i_R \\ \phi_R &= L_{RS}(\theta) i_S + L_{RR} i_R \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde:

$$L_{SS} = \begin{bmatrix} L_S & M_S & M_S \\ M_S & L_S & M_S \\ M_S & M_S & L_S \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$L_{RR} = \begin{bmatrix} L_R & M_R & M_R \\ M_R & L_R & M_R \\ M_R & M_R & L_R \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta) = M_{SR} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta + 4\pi/3) \\ \cos(\theta + 4\pi/3) & \cos \theta & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta + 4\pi/3) & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{L}_{RS}(\theta) = \mathbf{L}_{SR}(\theta)^t \quad (2.14)$$

As matrizes (2.11) e (2.12) são chamadas de matrizes circulantes simétricas.

2.4 EQUAÇÕES DAS TENSÕES

Na medida que for possível será mantida a representação matricial no desenvolvimento deste capítulo.

Das leis da física, podemos escrever as expressões das tensões como estão representadas nas expressões (2.15) e (2.16):

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \frac{d\phi_S}{dt} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_R + \frac{d\phi_R}{dt} \quad (2.16)$$

onde:

$$\mathbf{R}_S = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{R}_R = \begin{bmatrix} R_R & 0 & 0 \\ 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

A seguir serão desenvolvidas as expressões dos fluxos:

$$\frac{d\phi_S}{dt} = \frac{d(\mathbf{L}_{SS} \mathbf{i}_S + \mathbf{L}_{SR}(\theta) \mathbf{i}_R)}{dt} \quad (2.19)$$

$$\frac{d\phi_s}{dt} = \frac{d(L_{SS}i_s)}{dt} + \frac{d(L_{SR}(\theta)i_r)}{dt} \quad (2.20)$$

$$\frac{d\phi_s}{dt} = L_{SS} \frac{di_s}{dt} + L_{SR}(\theta) \frac{di_r}{dt} + \frac{dL_{SR}(\theta)}{dt} i_r \quad (2.21)$$

mas

$$\frac{dL_{SR}(\theta)}{dt} = \frac{\partial L_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.22)$$

Assim, a derivada do fluxo do estator é representada pela expressão (2.23).

$$\frac{d\phi_s}{dt} = L_{SS} \frac{di_s}{dt} + L_{SR}(\theta) \frac{di_r}{dt} + \frac{\partial L_{SR}(\theta)}{\partial \theta} i_r \frac{d\theta}{dt} \quad (2.23)$$

A derivada do fluxo do rotor, obtida de maneira análoga, é representada pela expressão (2.24):

$$\frac{d\phi_r}{dt} = L_{RR} \frac{di_r}{dt} + L_{RS}(\theta) \frac{di_s}{dt} + \frac{\partial L_{RS}(\theta)}{\partial \theta} i_s \frac{d\theta}{dt} \quad (2.24)$$

Levando-se as expressões das derivadas dos fluxos (2.23) e (2.24) nas expressões (2.15) e (2.16), obtém-se as expressões das tensões, (2.25) e (2.26):

$$v_s = R_s i_s + L_{SS} \frac{di_s}{dt} + L_{SR}(\theta) \frac{di_r}{dt} + \frac{\partial L_{SR}(\theta)}{\partial \theta} i_r \frac{d\theta}{dt} \quad (2.25)$$

$$v_r = R_r i_r + L_{RR} \frac{di_r}{dt} + L_{RS}(\theta) \frac{di_s}{dt} + \frac{\partial L_{RS}(\theta)}{\partial \theta} i_s \frac{d\theta}{dt} \quad (2.26)$$

2.5 EQUAÇÃO DO TORQUE

Como foi estabelecido no capítulo 1, o torque de excitação, quando se trata de dois enrolamentos, é determinado pela expressão (2.27):

$$T = \mathbf{i}_S \mathbf{i}_R \frac{d\mathbf{M}_{SR}(\theta)}{dt} \quad (2.27)$$

Na máquina simétrica trifásica há três enrolamentos no estator e três no rotor. Adicionando os torques produzidos pelos seis enrolamentos, obtém-se a expressão (2.28):

$$\begin{aligned} T = & \mathbf{i}_{R_1} \left\{ \mathbf{i}_{S_1} \frac{\partial M_{S_1R_1}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_{S_2} \frac{\partial M_{S_2R_1}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_{S_3} \frac{\partial M_{S_3R_1}}{\partial \theta} \right\} + \\ & + \mathbf{i}_{R_2} \left\{ \mathbf{i}_{S_1} \frac{\partial M_{S_1R_2}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_{S_2} \frac{\partial M_{S_2R_2}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_{S_3} \frac{\partial M_{S_3R_2}}{\partial \theta} \right\} + \\ & + \mathbf{i}_{R_3} \left\{ \mathbf{i}_{S_1} \frac{\partial M_{S_1R_3}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_{S_2} \frac{\partial M_{S_2R_3}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_{S_3} \frac{\partial M_{S_3R_3}}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Representando-se na forma matricial, obtém-se a expressão (2.29):

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{S_1} & \mathbf{i}_{S_2} & \mathbf{i}_{S_3} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} M_{S_1R_1} & M_{S_1R_2} & M_{S_1R_3} \\ M_{S_2R_1} & M_{S_2R_2} & M_{S_2R_3} \\ M_{S_3R_1} & M_{S_3R_2} & M_{S_3R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{R_1} \\ \mathbf{i}_{R_2} \\ \mathbf{i}_{R_3} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Seja:

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta) = \begin{bmatrix} M_{S_1R_1} & M_{S_1R_2} & M_{S_1R_3} \\ M_{S_2R_1} & M_{S_2R_2} & M_{S_2R_3} \\ M_{S_3R_1} & M_{S_3R_2} & M_{S_3R_3} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{i}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{R_1} \\ \mathbf{i}_{R_2} \\ \mathbf{i}_{R_3} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{i}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{S_1} \\ \mathbf{i}_{S_2} \\ \mathbf{i}_{S_3} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

A expressão do torque será então representada pela expressão (2.33).

$$T = \mathbf{i}_s^t \frac{\partial(\mathbf{L}_{SR}(\theta))}{\partial\theta} \mathbf{i}_R \quad (2.33)$$

Transpondo-se a expressão (2.33), obtém-se a expressão (2.34):

$$T = \mathbf{i}_R^t \frac{\partial(\mathbf{L}_{RS}(\theta))}{\partial\theta} \mathbf{i}_s \quad (2.34)$$

Adicionando-se as expressões (2.33) e (2.34) e dividindo-se por dois obtém-se a expressão (2.35).

$$T = \frac{1}{2} \left(\mathbf{i}_s^t \frac{\partial(\mathbf{L}_{SR}(\theta))}{\partial\theta} \mathbf{i}_R + \mathbf{i}_R^t \frac{\partial(\mathbf{L}_{RS}(\theta))}{\partial\theta} \mathbf{i}_s \right) \quad (2.35)$$

A expressão (2.35) pode ser reescrita segundo a expressão (2.36).

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \left(\mathbf{i}_s^t \mid \mathbf{i}_R^t \right) \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{L}_{SR}(\theta) \\ \hline \mathbf{L}_{RS}(\theta) & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_R \end{array} \right) \right\} \quad (2.36)$$

As matrizes \mathbf{L}_{SS} e \mathbf{L}_{RR} são formadas por termos independentes da posição angular θ . Por isto:

$$\frac{\partial\mathbf{L}_{SS}}{\partial\theta} = \frac{\partial\mathbf{L}_{RR}}{\partial\theta} = 0 \quad (2.37)$$

Pode-se consequentemente estabelecer que:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{L}_{SR}(\theta) \\ \hline \mathbf{L}_{RS}(\theta) & 0 \end{array} \right) = \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{SS} & \mathbf{L}_{SR}(\theta) \\ \hline \mathbf{L}_{RS}(\theta) & \mathbf{L}_{RR} \end{array} \right) \quad (2.38)$$

Seja:

$$\mathbf{i}^t = \left(\mathbf{i}_s^t \mid \mathbf{i}_R^t \right) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{i} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_R \end{array} \right) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{L}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{SS} & \mathbf{L}_{SR}(\theta) \\ \mathbf{L}_{RS}(\theta) & \mathbf{L}_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Assim o torque será representado pela expressão (2.42):

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \quad (2.42)$$

2.6 EQUAÇÕES FINAIS DA MÁQUINA

Reunindo-se as expressões das tensões e do torque, (2.25) e (2.26) e (2.42) respectivamente, obtém-se o modelo completo da máquina, representado pelas expressões (2.43), (2.44) e (2.45).

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \mathbf{L}_{SS} \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} + \mathbf{L}_{SR}(\theta) \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_R \frac{d\theta}{dt} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_R + \mathbf{L}_{RR} \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} + \mathbf{L}_{RS}(\theta) \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{RS}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_S \frac{d\theta}{dt} \quad (2.44)$$

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \quad (2.45)$$

As equações elétricas podem ser reescritas segundo a expressão (2.46):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_S \\ \mathbf{v}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_S & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{i}_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{SS} & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{RR} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{i}_R \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{SR}(\theta) & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{RS}(\theta) \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{i}_R \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{L}_{SR}(\theta) \\ \mathbf{L}_{RS}(\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{i}_R \end{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.46)$$

As expressões (2.46) podem ser reescritas de uma forma mais compacta, segundo a expressão (2.47):

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{L}(\theta) \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.47)$$

Pois:

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_s & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{R}_r \end{array} \right) \quad (2.48)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{ss} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{L}_{rr} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{L}_{sr}(\theta) \\ \hline \mathbf{L}_{rs}(\theta) & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sr}(\theta) \\ \hline \mathbf{L}_{rs}(\theta) & \mathbf{L}_{rr} \end{array} \right) \quad (2.49)$$

Reunindo-se as expressões (2.47) e (2.42) obtém-se o modelo da máquina simétrica na sua forma mais compacta, representada pelas expressões (2.50):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}(\theta)\mathbf{p}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \dot{\theta} \\ \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.7 OUTRA TÉCNICA PARA OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DO TORQUE

Consideremos a expressão das tensões (2.51):

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}(\theta)\mathbf{p}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \dot{\theta} \quad (2.51)$$

Pré-multiplicando-se todos os termos da equação pelo vetor corrente transposto obtém-se a equação (2.52):

$$\mathbf{i}^t \mathbf{v} = \mathbf{i}^t \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{i}^t \mathbf{L}(\theta)\mathbf{p}\mathbf{i} + \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \dot{\theta} \quad (2.52)$$

Por outro lado:

$$\mathbf{i}^t \left(\frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{L}(\theta) \mathbf{i} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{L}(\theta) \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \dot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{i}^t}{dt} \mathbf{L}(\theta) \mathbf{i} \quad (2.53)$$

mas:

$$\frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{i}^t}{dt} \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{i} \quad (2.54)$$

Assim:

$$\mathbf{i}^t \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{i} \dot{\boldsymbol{\theta}} + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{i} \right) \quad (2.55)$$

Substituindo-se a expressão (2.55) em (2.52), obtém-se a expressão (2.56):

$$\mathbf{i}^t \mathbf{v} = \mathbf{i}^t \mathbf{R} \mathbf{i} + p \left(\frac{1}{2} \mathbf{i}^t \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{i} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{i} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.56)$$

O último termo da expressão (2.56) representa a parcela de potência elétrica absorvida pela máquina e convertida em potência mecânica. Assim:

$$P_m = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{i} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.57)$$

portanto:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{i} \quad (2.58)$$

Fica assim estabelecida a equação do torque, com o emprego de um método diferente daquele empregado no item 2.5.

Os diversos termos das expressões (2.47) podem ser interpretados fisicamente. Assim:

- (a) $\mathbf{R} \mathbf{i}$ → Representa as quedas de tensão nas resistências dos enrolamentos da máquina.
- (b) $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}) p \mathbf{i}$ → Representa as tensões geradas nos enrolamentos, causadas pela variação das correntes. São tensões variacionais.
- (c) $\frac{\partial \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{i} \dot{\boldsymbol{\theta}}$ → São as tensões geradas nos enrolamentos, quando há deslocamento relativo entre eles. São denominadas tensões rotacionais.

Quando $\dot{\theta} = 0$, ou seja, quando o rotor estiver em repouso, o modelo passa a ser representado pela expressão (2.59):

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}(\theta)\mathbf{p}\mathbf{i} \quad (2.59)$$

que representa um transformador.

2.8 CONCLUSÕES

As equações (2.50) são não lineares e de difícil solução. Em geral, não são empregadas no estudo do comportamento da máquina.

Por isto, foram desenvolvidas técnicas baseadas em transformações lineares, com o objetivo de estabelecer modelos mais simples a partir do modelo original estabelecido neste capítulo. Tais técnicas serão estudadas nos capítulos seguintes.

Em alguns trabalhos, destinados a determinar o comportamento da máquina de indução associada a certos tipos de conversores estáticos, o modelo representado pelas equações (2.50) foram empregados. Tal tipo de estudo porém é muito particular e só pode ser realizado com o emprego de computadores.

2.9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Seja uma máquina simétrica trifásica, alimentada em corrente no estator e no rotor. As correntes estatóricas e rotóricas são dadas pelas expressões seguintes:

$$i_{s_1} = I_S \cos(\omega_s t + \theta_s)$$

$$i_{s_2} = I_S \cos(\omega_s t + \theta_s - 2\pi/3)$$

$$i_{s_3} = I_S \cos(\omega_s t + \theta_s - 4\pi/3)$$

$$i_{r_1} = I_R \cos(\omega_r t + \theta_r)$$

$$i_{r_2} = I_R \cos(\omega_r t + \theta_r - 2\pi/3)$$

$$i_{r_3} = I_R \cos(\omega_r t + \theta_r - 4\pi/3)$$

O rotor gira com velocidade ω_m em relação ao estator. Será considerada uma máquina de indução de dois pólos. Assim:

$$\omega_s = \omega_r + \omega_m$$

Pede-se a expressão final do torque desenvolvido pela máquina.