

3.1 INTRODUÇÃO

O primeiro passo a ser dado na obtenção de modelos mais adequados para a análise da máquina de indução é o estudo da transformação $\alpha\beta 0$. Consiste numa transformação linear que diagonaliza as matrizes circulantes simétricas, que aparecem na formulação dos modelos da máquina trifásica simétrica.

Fisicamente a transformação $\alpha\beta 0$ transforma a máquina simétrica trifásica numa máquina simétrica bifásica, com mesma potência mecânica, torque, velocidade e número de pólos. Por isto é também conhecida com o nome de transformação trifásica-bifásica.

Esta transformação é muito útil também no estudo de transitórios de transformadores simétricos e reatores trifásicos.

A alimentação pode ser não-simétrica e não-senoidal, desde que a máquina seja simétrica.

3.2 OBTENÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO $\alpha\beta 0$

Seja duas estruturas, uma trifásica e uma bifásica, representadas Fig. 3.1 e Fig. 3.2:

Os enrolamentos que compõem a estrutura trifásica possuem n_3 espiras e os que compõem a estrutura bifásica possuem n_2 espiras.

Cada enrolamento, ao ser percorrido por uma corrente produz uma força magnetomotriz F .

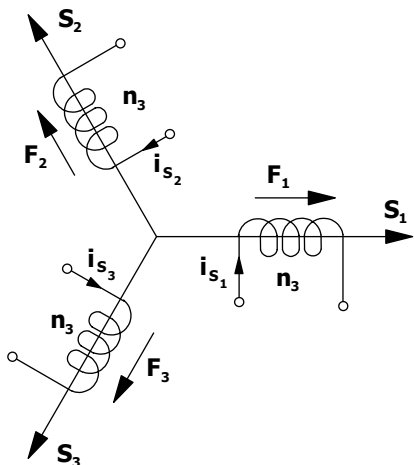


Fig. 3.1 – Circuito trifásico simétrico.

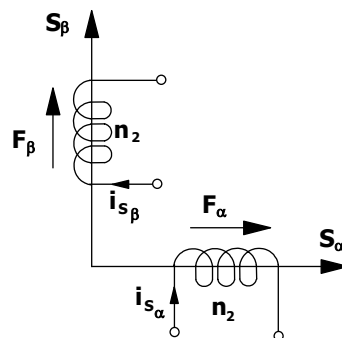


Fig. 3.2 – Circuito bifásico simétrico.

Será estabelecida uma transformação que permita encontrar F_α e F_β em função de F_1 , F_2 e F_3 , de sorte que a estrutura bifásica produza uma força magnetomotriz resultante com efeito semelhante à resultante da estrutura trifásica.

Decompondo-se vetorialmente F_1 , F_2 e F_3 segundo os eixos S_α e S_β encontram-se as expressões (3.1) e (3.2).

$$F_{S_\alpha} = F_{S_1} + F_{S_2} \cos(2\pi/3) + F_{S_3} \cos(4\pi/3) \quad (3.1)$$

$$F_{S_\beta} = 0 + F_{S_2} \sin(2\pi/3) + F_{S_3} \sin(4\pi/3) \quad (3.2)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} F_{S_\alpha} \\ F_{S_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{S_1} \\ F_{S_2} \\ F_{S_3} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

mas:

$$\begin{bmatrix} F_{S_\alpha} \\ F_{S_\beta} \end{bmatrix} = n_2 \begin{bmatrix} i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{bmatrix} F_{S_1} \\ F_{S_2} \\ F_{S_3} \end{bmatrix} = n_3 \begin{bmatrix} i_{S_1} \\ i_{S_2} \\ i_{S_3} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Substituindo-se as expressões (3.4) e (3.5) na expressão (3.3) encontramos a expressão (3.6):

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{S_\alpha} \\ \dot{i}_{S_\beta} \end{bmatrix} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_1} \\ \dot{i}_{S_2} \\ \dot{i}_{S_3} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para que a matriz definida pela expressão (3.6) possa ser invertida, vamos definir a corrente i_0 segundo a expressão (3.7):

$$i_{S_0} = a \frac{n_3}{n_2} (\dot{i}_{S_1} + \dot{i}_{S_2} + \dot{i}_{S_3}) \quad (3.7)$$

Levando-se (3.7) em (3.6) obtém-se (3.8):

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{S_0} \\ \dot{i}_{S_\alpha} \\ \dot{i}_{S_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_3 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_1} \\ \dot{i}_{S_2} \\ \dot{i}_{S_3} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Seja a matriz definida pela expressão (3.9):

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para que a potência seja invariante (apêndice), deve-se satisfazer a seguinte relação:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}^{t^{-1}} \quad (3.10)$$

ou

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t \quad (3.11)$$

ou

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}^{-t} = \mathbb{I} \quad (3.12)$$

sendo \mathbb{I} a matriz identidade, ou:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} \frac{n_3}{n_2} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ a & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Assim:

$$3 \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2 a^2 = 1 \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{n_3}{n_2} \right)^2 (1 + 1/4 + 1/4) = 1 \quad (3.16)$$

Portanto:

$$\frac{n_3}{n_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.17)$$

e

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.18)$$

Assim a matriz torna-se:

$$\mathbf{A}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Seja:

$$\mathbf{i}_{s_{0\alpha\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{s_0} \\ \dot{i}_{s_\alpha} \\ \dot{i}_{s_\beta} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

e

$$\mathbf{i}_{s_{123}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_{s_1} \\ \dot{i}_{s_2} \\ \dot{i}_{s_3} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{i}_{s_{0\alpha\beta}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{i}_{s_{123}} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{i}_{s_{123}} = \mathbf{A} \mathbf{i}_{s_{0\alpha\beta}} \quad (3.23)$$

A matriz \mathbf{A}^{-1} define a transformação $\alpha\beta 0$ ou trifásica-bifásica.

3.3 PROPRIEDADES DA TRANSFORMAÇÃO $\alpha\beta 0$

Consideremos um enrolamento trifásico simétrico (estator de um motor de indução com enrolamento rotórico aberto).

Sejam nulas as resistências desse enrolamento. Consideremos a expressão dos fluxos, representada por (3.24):

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

ou

$$\boldsymbol{\phi}_{123} = \mathbf{L} \mathbf{i}_{123} \quad (3.25)$$

Seja:

$$\boldsymbol{\phi}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\phi}_{123} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{i}_{123} \quad (3.27)$$

Assim:

$$\mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\phi}_{123} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{i}_{123} \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{0\alpha\beta} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{i}_{0\alpha\beta} \quad (3.29)$$

Seja:

$$\mathbf{L}_N = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (3.30)$$

Assim:

$$\boldsymbol{\phi}_{0\alpha\beta} = \mathbf{L}_N \mathbf{i}_{0\alpha\beta} \quad (3.31)$$

Calculemos a matriz \mathbf{L}_N :

$$\mathbf{L}_N = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{L}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{L} + 2\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} - \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} - \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Seja:

$$\mathbb{L}_0 = \mathbf{L} + 2\mathbf{M} \quad (3.34)$$

$$\mathbb{L}_s = \mathbf{L} - \mathbf{M} \quad (3.35)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{L}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{L}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

As novas indutâncias são definidas do seguinte modo:

\mathbb{L}_0 - indutância cíclica homopolar

\mathbb{L}_s - indutância cíclica

Comparando-se as expressões (3.24) e (3.36), verifica-se que a matriz indutância foi diagonalizada.

A matriz indutância \mathbf{L} original é do tipo circulante simétrica, que aparece na formulação dos modelos das máquinas elétricas. Daí a importância prática da transformação $\alpha\beta 0$.

3.4 ESTUDO DO REATOR TRIFÁSICO SIMÉTRICO

Será empregada, a título de exemplo, a transformação $\alpha\beta 0$ na análise de um reator trifásico simétrico, representado na Fig. 3.3:

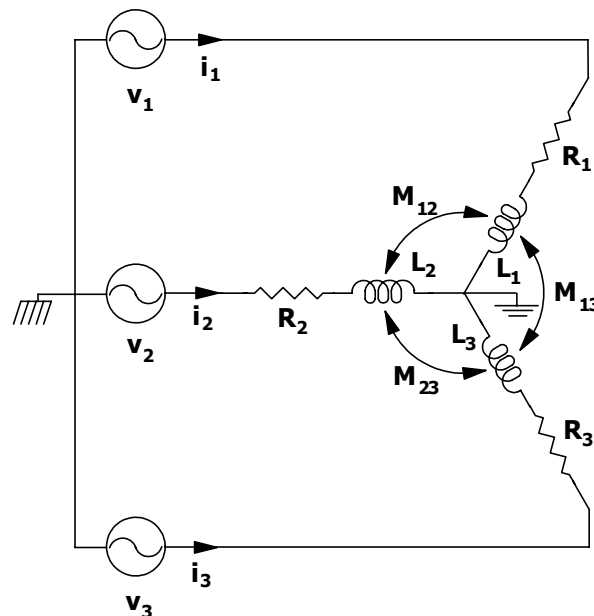


Fig. 3.3 – Circuito elétrico equivalente para o reator trifásico.

São conhecidos os parâmetros R , L e M e as tensões $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v_3(t)$. Deseja-se determinar as correntes $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

A equação das tensões é representada pela expressão (3.37).

$$\mathbf{v}_{123} = \mathbf{R}\mathbf{i}_{123} + p\mathbf{L}\mathbf{i}_{123} \quad (3.37)$$

Pré-multiplicando-se os termos de (3.37) por \mathbf{A}^{-1} obtém-se a expressão (3.38):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}_{123} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{i}_{123} + p\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{i}_{123} \quad (3.38)$$

Assim:

$$\mathbf{v}_{0\alpha\beta} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{i}_{0\alpha\beta} + p\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{i}_{0\alpha\beta} \quad (3.39)$$

Seja:

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{A} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{L}_N = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{A} \quad (3.41)$$

Assim:

$$\mathbf{V}_{0\alpha\beta} = \mathbf{R}_N\mathbf{i}_{0\alpha\beta} + p\mathbf{L}_N\mathbf{i}_{0\alpha\beta} \quad (3.42)$$

mas,

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{L}_N = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_S \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

O modelo do reator trifásico simétrico será então descrito pela expressão (3.45)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{v}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} + p\mathbb{L}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} + p\mathbb{L}_S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} + p\mathbb{L}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_\alpha \\ \mathbf{i}_\beta \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Constata-se que a matriz impedância fica diagonalizada. O reator é então representado por três equações diferenciais de 1ª ordem, representadas pelas expressões (3.46).

$$\begin{aligned}v_0 &= (R + pL_0)i_0 \\v_\alpha &= (R + pL_\alpha)i_\alpha \\v_\beta &= (R + pL_\beta)i_\beta\end{aligned}\tag{3.46}$$

Fisicamente o reator trifásico é convertido em três reatores monofásicos independentes, representados na Fig. 3.4.

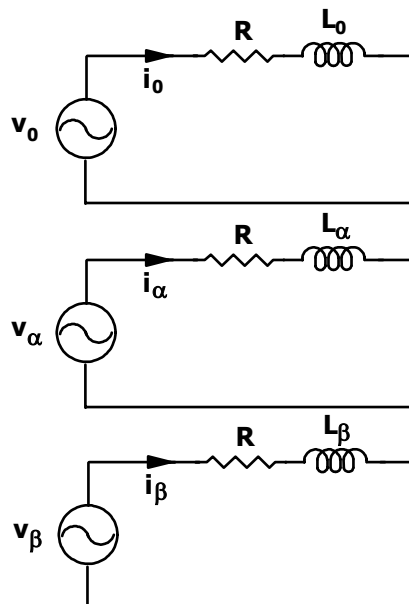


Fig. 3.4 – Modelo elétrico equivalente para o reator trifásico usando a transformada $\alpha\beta 0$.

Na solução de um problema particular do reator conhecendo-se v_1 , v_2 e v_3 determina-se v_0 , v_α e v_β . Com o emprego das equações (3.46) determina-se i_0 , i_α e i_β . Aplicando-se a transformação inversa, determina-se i_1 , i_2 e i_3 .

3.5 EMPREGO DA TRANSFORMAÇÃO $\alpha\beta 0$ NO ESTUDO DO TRANSFORMADOR

Seja um transformador trifásico simétrico, cuja estrutura está representada na Fig. 3.5.

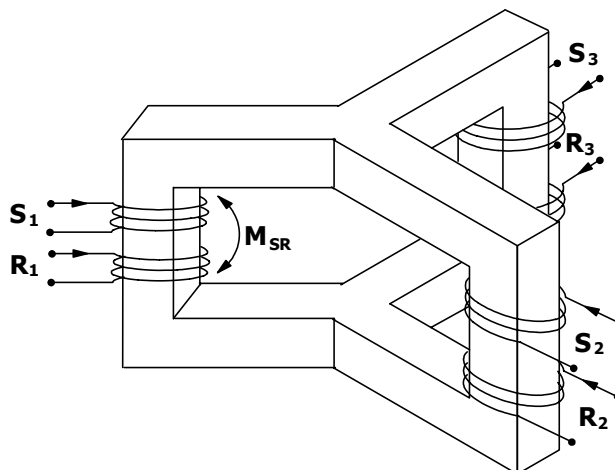


Fig. 3.5 – Estrutura do transformador trifásico simétrico.

O circuito correspondente está representado na Fig. 3.6.

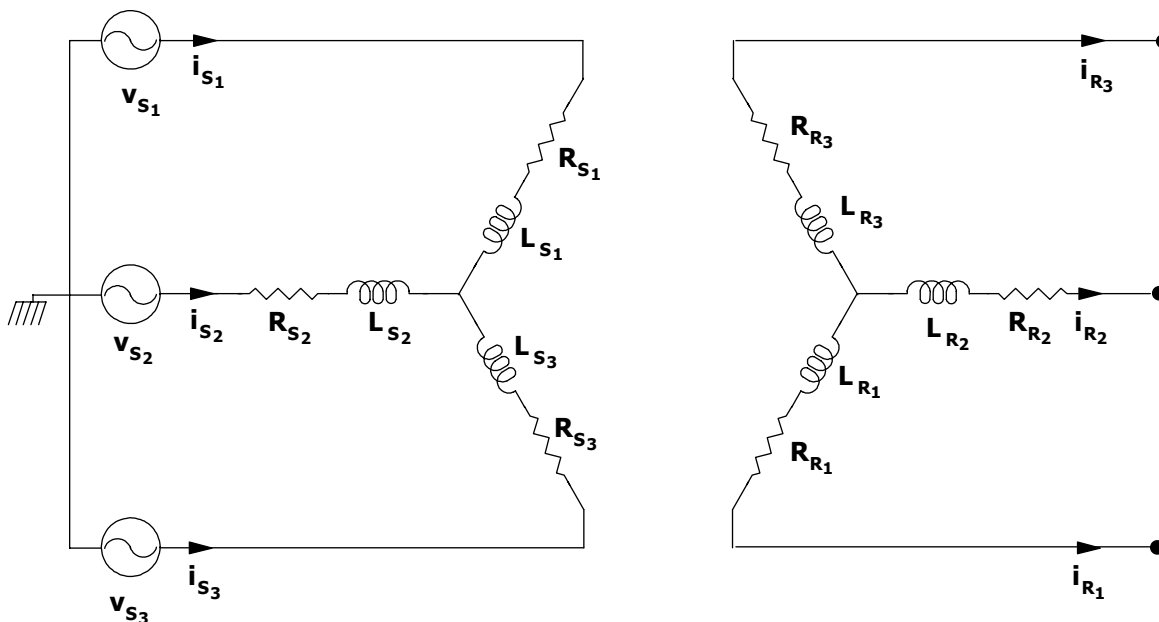


Fig. 3.6 – Circuito elétrico equivalente do transformador trifásico simétrico.

O transformador é representado pelas equações (3.47).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S &= \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \mathbf{L}_{SS} \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} + \mathbf{L}_{SR} \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} \\ \mathbf{v}_R &= \mathbf{R}_R \mathbf{i}_R + \mathbf{L}_{RR} \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} + \mathbf{L}_{RS} \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde:

$$\mathbf{R}_S = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{R}_R = \begin{bmatrix} R_R & 0 & 0 \\ 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{L}_{SS} = \begin{bmatrix} L_S & M_S & M_S \\ M_S & L_S & M_S \\ M_S & M_S & L_S \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{L}_{RR} = \begin{bmatrix} L_R & M_R & M_R \\ M_R & L_R & M_R \\ M_R & M_R & L_R \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{L}_{SR} = \mathbf{L}_{RS} = \begin{bmatrix} M_{SR} & -M_{SR}/2 & -M_{SR}/2 \\ -M_{SR}/2 & M_{SR} & -M_{SR}/2 \\ -M_{SR}/2 & -M_{SR}/2 & M_{SR} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Aplicando-se a transformação $\alpha\beta 0$ nas equações (3.47), obtém-se as equações (3.53) e (3.54):

$$\mathbf{v}_{S_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{A} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SS} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SR} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{v}_{R_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_R \mathbf{A} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{RR} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SR} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} \quad (3.54)$$

As expressões (3.53) e (3.54) podem ser reescritas segundo as expressões (3.55) e (3.56).

$$\mathbf{v}_{S_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{R}_{S_N} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{L}_{SS_N} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{L}_{SR_N} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{v}_{R_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{R}_{R_N} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{L}_{RR_N} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{L}_{RS_N} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} \quad (3.56)$$

As matrizes parâmetros transformados estão representadas pelas expressões (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) e (3.61):

$$\mathbf{R}_{S_N} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 \\ 0 & 0 & R_S \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{R}_{R_N} = \begin{bmatrix} R_R & 0 & 0 \\ 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{L}_{SS} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_S & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_S \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{L}_{RR} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_R & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{L}_{SR} = \mathbf{L}_{RS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} & 0 \\ 0 & 0 & m_{SR} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

onde:

$$\mathbb{L}_{S0} = L_S + 2M_S \quad \Rightarrow \quad \text{indutância cíclica homopolar do primário.}$$

$$\mathbb{L}_{R0} = L_R + 2M_R \quad \Rightarrow \quad \text{indutância cíclica homopolar do secundário.}$$

$$\mathbb{L}_S = L_S - M_S \quad \Rightarrow \quad \text{indutância cíclica do primário.}$$

$$\mathbb{L}_R = L_R - M_R \quad \Rightarrow \quad \text{indutância cíclica do secundário.}$$

$$m_{SR} = \frac{3}{2} M_{SR} \quad \Rightarrow \quad \text{indutância mútua cíclica.}$$

O modelo completo do transformador é representado pelas expressões (3.62).

$$\begin{bmatrix} v_{S_0} \\ v_{S_\alpha} \\ v_{S_\beta} \\ v_{R_0} \\ v_{R_\alpha} \\ v_{R_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \\ i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p\mathbb{L}_{S_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\mathbb{L}_S & 0 & 0 & pm_{SR} & 0 \\ 0 & 0 & p\mathbb{L}_S & 0 & 0 & pm_{SR} \\ 0 & 0 & 0 & p\mathbb{L}_{R_0} & 0 & 0 \\ 0 & pm_{SR} & 0 & 0 & p\mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & 0 & pm_{SR} & 0 & 0 & p\mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \\ i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Como as matrizes parâmetros são diagonalizadas, o modelo (3.62) pode ser reescrito segundo as equações (3.63), (3.64) e (3.65).

$$\begin{bmatrix} v_{S_0} \\ v_{R_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{R_0} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_{R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{R_0} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\begin{bmatrix} v_{S_\alpha} \\ v_{R_\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_\alpha} \\ i_{R_\alpha} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_{R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_\alpha} \\ i_{R_\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} v_{S_\beta} \\ v_{R_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_\beta} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_{R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_\beta} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

As equações (3.63), (3.64) e (3.65) representam três transformadores monofásicos independentes, representados pela Fig. 3.7, Fig. 3.8 e Fig. 3.9.

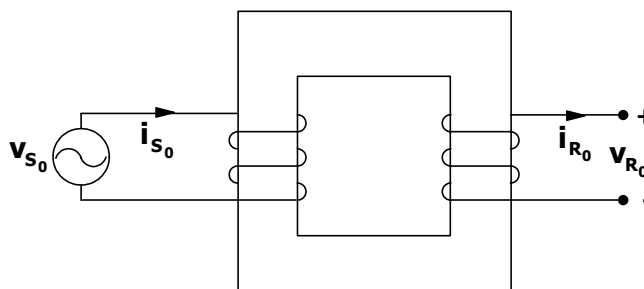
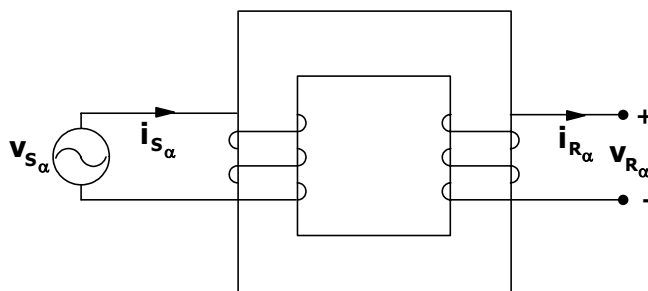
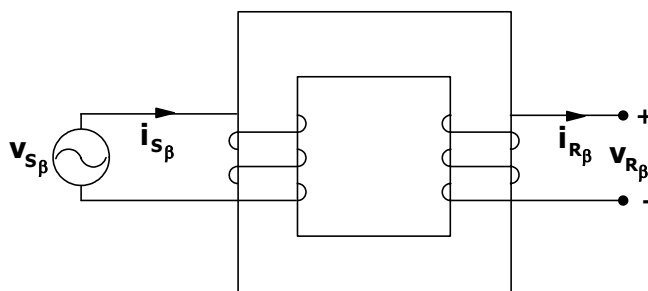


Fig. 3.7 – Seqüência 0.

Fig. 3.8 – Seqüência α .Fig. 3.9 – Seqüência β .

Desse modo, a transformação $\alpha\beta 0$ apresenta a importante propriedade de converter um transformador trifásico simétrico em três transformadores monofásicos independentes, tornando a análise muito simples.

3.6 APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO TRIFÁSICA-BIFÁSICA NAS EQUAÇÕES DA MÁQUINA SIMÉTRICA TRIFÁSICA

No capítulo 2 foram estabelecidas as equações da máquina simétrica trifásica, representadas neste capítulo pelas expressões (3.66), (3.67) e (3.68).

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_S + \mathbf{L}_{SS} \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} + \mathbf{L}_{SR}(\theta) \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_R \frac{d\theta}{dt} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_R + \mathbf{L}_{RR} \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} + \mathbf{L}_{RS}(\theta) \frac{d\mathbf{i}_S}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{RS}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_S \frac{d\theta}{dt} \quad (3.67)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{i}^t \frac{\partial \mathbf{L}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i} \quad (3.68)$$

Aplicando-se a transformação \mathbf{A}^{-1} na expressão (3.66) obtém-se a expressão (3.69):

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_S = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{A} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SS} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.69)$$

Definindo-se:

$$\mathbf{R}_{S_N} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{A} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{R}_{R_N} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_R \mathbf{A} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{L}_{SS_N} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SS} \mathbf{A} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{L}_{RR_N} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{RR} \mathbf{A} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta})_N = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta})_N = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{A} \quad (3.75)$$

Substituindo as últimas expressões em (3.69) e generalizando os resultados para a expressão da tensão rotórica obtém-se as expressões (3.76) e (3.77), que são as equações elétricas da máquina nas variáveis $\alpha\beta 0$.

$$\mathbf{v}_{S_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{R}_{S_N} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{L}_{SS_N} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta})_N \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta})_N}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{v}_{R_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{R}_{R_N} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{L}_{RR_N} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \mathbf{L}_{RS}(\boldsymbol{\theta})_N \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{RS}(\boldsymbol{\theta})_N}{\partial \theta} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.77)$$

Para se obter a expressão do torque, adota-se o procedimento a seguir:

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_S^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta} \mathbf{i}_R \quad (3.78)$$

$$\mathbf{i}_S = \mathbf{A} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{i}_s^t = \mathbf{i}_{s_{\alpha\beta 0}}^t \mathbf{A}^t \quad (3.80)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_{s_{\alpha\beta 0}}^t \mathbf{A}^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{A} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_{s_{\alpha\beta 0}}^t \frac{\partial (\mathbf{A}^t \mathbf{L}_{SR}(\theta) \mathbf{A})}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \quad (3.82)$$

Assim:

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_{s_{\alpha\beta 0}}^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)_N}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \quad (3.83)$$

As matrizes \mathbf{R}_{S_N} , \mathbf{R}_{R_N} , \mathbf{L}_{SS_N} e \mathbf{L}_{RR_N} são as mesmas obtidas no estudo do transformador.

No procedimento que segue, é estabelecida a matriz $\mathbf{L}_{RS}(\theta)_N$.

Substituindo-se as matrizes \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{A} e $\mathbf{L}_{SR}(\theta)$ na expressão (3.75), obtém-se a expressão (3.84).

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta)_N = \frac{2}{3} \mathbf{M}_{SR} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Realizando-se os produtos matriciais obtém-se as matrizes (3.85) e (3.86):

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta)_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} \cos \theta & -m_{SR} \sin \theta \\ 0 & m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{L}_{RS}(\theta)_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} \cos \theta & m_{SR} \sin \theta \\ 0 & -m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Pois

$$\mathbf{L}_{RS}(\theta)_N = \mathbf{L}_{SR}(\theta)_N^t \quad (3.87)$$

Com:

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta)_N \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)_N}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{SR}(\theta)_N}{dt} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \quad (3.88)$$

pode-se escrever o modelo final sob a forma de variáveis $\alpha\beta 0$ da máquina simétrica trifásica, segundo as expressões (3.89):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{S_{\alpha\beta 0}} &= \mathbf{R}_{S_N} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{L}_{SS_N} \frac{d\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_{SR}(\theta)_N}{dt} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \\ \mathbf{v}_{R_{\alpha\beta 0}} &= \mathbf{R}_{R_N} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} + \mathbf{L}_{RR_N} \frac{d\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}}}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_{SR}(\theta)_N}{dt} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}} \\ T &= \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta 0}}^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)_N}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta 0}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

O modelo desenvolvido, obtido a partir das expressões (3.89) é representado pelas expressões (3.90).

Nelas verifica-se a presença do ângulo θ nas matrizes indutâncias mútuas. Por isto o modelo é não linear e de difícil solução analítica.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{S_0} \\ v_{S_\alpha} \\ v_{S_\beta} \\ v_{R_0} \\ v_{R_\alpha} \\ v_{R_\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 & & & \\ 0 & R_S & 0 & & & \\ 0 & 0 & R_S & & & \\ & & & R_R & 0 & 0 \\ & & & 0 & R_R & 0 \\ & & & 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \\ i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} + \\ +P \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 & | & 0 & m_{SR} \cos \theta & -m_{SR} \sin \theta \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_S & | & 0 & m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \mathbb{L}_{R_0} & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} \cos \theta & m_{SR} \sin \theta & | & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & -m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta & | & 0 & 0 & \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \\ i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$T = m_{SR} \begin{bmatrix} i_{S_0} & i_{S_\alpha} & i_{S_\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

No capítulo seguinte será introduzida a transformação de PARK, destinada a simplificar mais o modelo da máquina simétrica trifásica.

O efeito da transformação $\alpha\beta 0$ aplicado á máquina simétrica trifásica pode ser melhor evidenciado com o auxílio da Fig. 3.10 e Fig. 3.11:

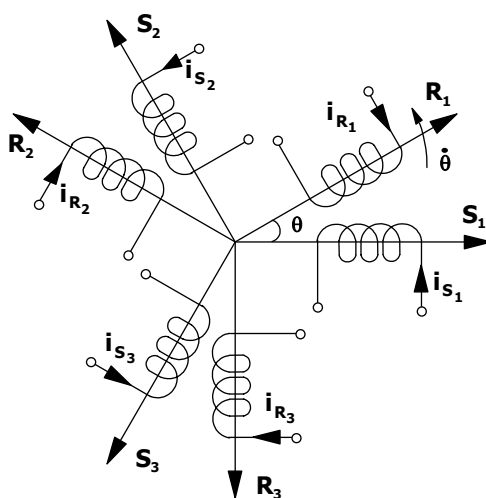


Fig. 3.10 – Motor trifásico.

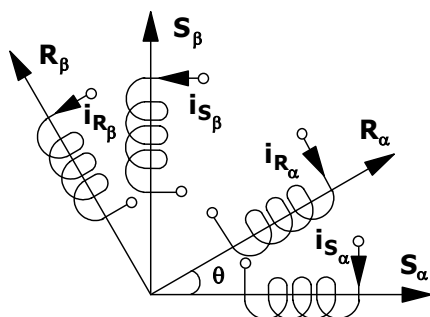


Fig. 3.11 – Motor bifásico equivalente.

Portanto, a máquina trifásica real é transformada numa máquina bifásica imaginária. A ausência dos enrolamentos de seqüência zero ou homopolar será explicada no item 3.7.

3.7 INTERPRETAÇÃO DA INDUTÂNCIA CÍCLICA HOMOPOLAR

Seja a máquina simétrica com enrolamentos rotóricos abertos e enrolamentos estatóricos submetidos a uma mesma tensão, de acordo com o que está representado na Fig. 3.12.

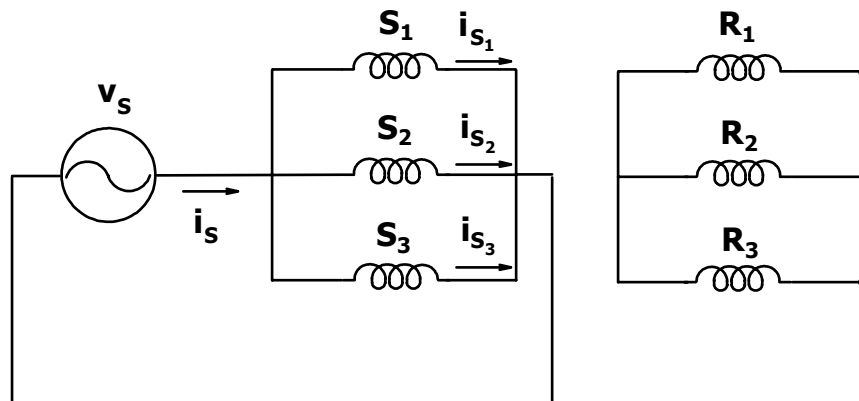


Fig. 3.12 – Máquina simétrica trifásica com enrolamentos rotóricos abertos sendo os estatóricos alimentados com a mesma tensão.

$$v_{S_1} = v_{S_2} = v_{S_3} = v_S \quad (3.91)$$

Levando-se as tensões v_{S_1} , v_{S_2} e v_{S_3} da expressão (3.91) na expressão (3.92), obtém-se os resultados a seguir:

$$\mathbf{v}_{S_{\alpha\beta 0}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_{S_{123}} \quad (3.92)$$

$$v_{S_\alpha} = 0 \quad (3.93)$$

$$v_{S_\beta} = 0 \quad (3.94)$$

$$v_{S_0} = \sqrt{3} v_S \quad (3.95)$$

Considerando a máquina em regime permanente, tem-se:

$$i_{S_0} = \frac{v_{S_0}}{2\pi f L_{L_0}} \quad (3.96)$$

$$i_{s_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i_{s_1} + i_{s_2} + i_{s_3}) \quad (3.97)$$

Então

$$i_{s_0} = \frac{i_s}{\sqrt{3}} \quad (3.98)$$

Levando (3.98) e (3.95) em (3.96), obtém-se:

$$\frac{i_s}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} v_s}{2\pi f L_0} \quad (3.99)$$

Assim:

$$i_s = \frac{3 v_s}{X_0} \quad (3.100)$$

onde:

$$X_0 = 2\pi f L_0 \quad (3.101)$$

Pode-se imediatamente concluir que a corrente que circula na fonte fica limitada apenas pela reatância cíclica homopolar.

Para facilitar a interpretação física, será considerada a Fig. 3.11:

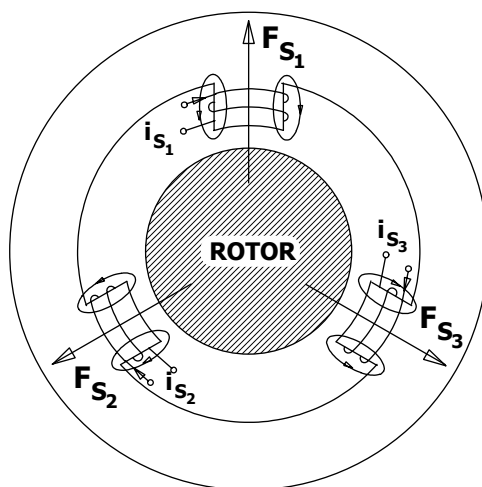


Fig. 3.13 – Estrutura de uma máquina simétrica trifásica.

Como as correntes i_{S_1} , i_{S_2} e i_{S_3} , são iguais, as três forças magnetomotrizes, F_{S_1} , F_{S_2} e F_{S_3} são iguais em módulo e em fase no tempo. Assim os fluxos são nulos, com exceção dos fluxos de dispersão, que se fecham pelo ar e que estão representados na Fig. 3.13.

Pode-se então concluir que a indutância de seqüência zero ou cíclica homopolar é uma imagem da indutância da dispersão.

Consideramos as equações completas de seqüência zero, obtidas a partir das equações (3.90).

$$\begin{bmatrix} v_{S_0} \\ v_{R_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{R_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pL_{S_0} & 0 \\ 0 & pL_{R_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{R_0} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Segundo as expressões (3.102) não há indutância mútua entre as componentes de seqüência homopolar do estator e do rotor.

Quando não há fio neutro na alimentação da máquina simétrica trifásica as tensões e correntes homopolares não existem.

Quando há neutro e a alimentação for balanceada, existem componentes homopolares. Contudo elas não produzem torque, como pode ser constatado a partir das expressões (3.90).

3.8 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

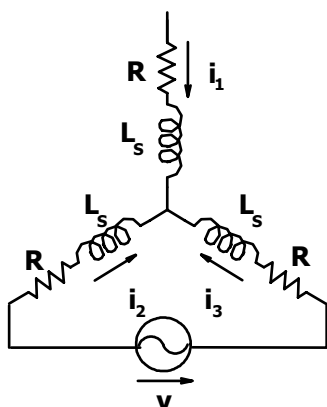


Fig. 3.14 – Rotor trifásico com uma fase em aberto.

1) Seja a estrutura representada na Fig. 3.14, com os seguintes parâmetros:

$$R = 1\Omega$$

$$L_s = 0,280\text{H (indutância cíclica)}$$

$$f = 60\text{Hz}$$

$$V = 380\text{V (valor eficaz)}$$

O circuito é considerado em regime permanente. Determinar as expressões e os valores das correntes nas fases da estrutura.

2) Repetir os cálculos para a Fig. 3.15, representada a seguir:

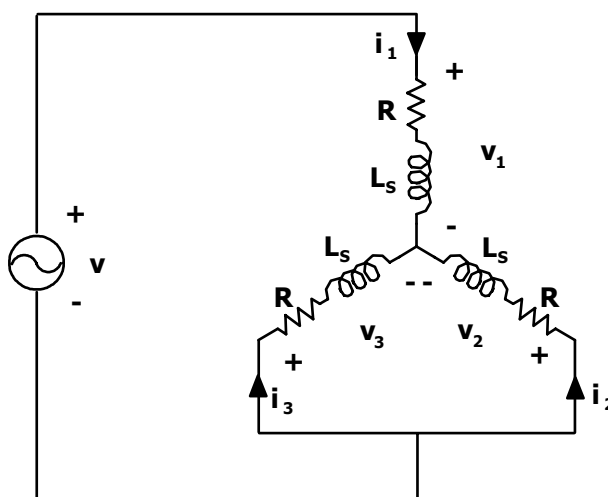


Fig. 3.15 – Rotor trifásico com duas fases em paralelo e em série com a terceira sendo alimentadas por uma fonte de tensão única.

3) Seja a estrutura representada na Fig. 3.16:

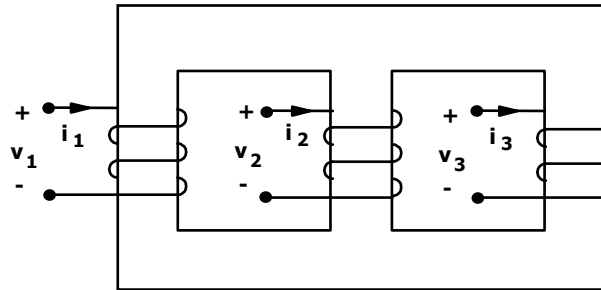


Fig. 3.16 – Estrutura de um reator trifásico.

onde: $R_1 = R_2 = R_3 = R = 0,5 \, \Omega$,

$L_1 = L_2 = L_3 = L = 60 \text{ mH}$ (próprias)

$M = -30 \text{ mH}$ (mútuas)

No instante $t = 0$ aplicam-se as seguintes tensões nos enrolamentos:

$v_1 = 50 \text{ V}$; $v_2 = 30 \text{ V}$; $v_3 = 100 \text{ V}$

Empregando a transformação $\alpha\beta 0$, determinar as correntes nos enrolamentos em função do tempo.

4) Seja um reator trifásico, representado esquematicamente pela Fig. 3.17:

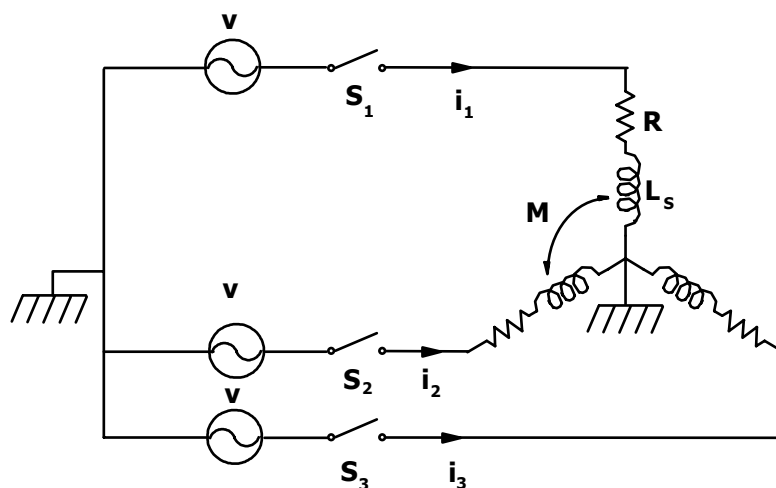


Fig. 3.17 – Circuito elétrico equivalente para o reator trifásico.

Os parâmetros são os mesmos do exercício 3. Os interruptores S_1 , S_2 e S_3 são fechados simultaneamente.

$$v_1 = V \cos \omega t$$

$$v_2 = V \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$v_3 = V \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

onde

$$\omega = 377 \text{ rad/s}$$

$$v = \sqrt{2} 220 \text{ volts}$$

Determinar as correntes $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

5) Seja o transformador trifásico, representado na Fig. 3.18.

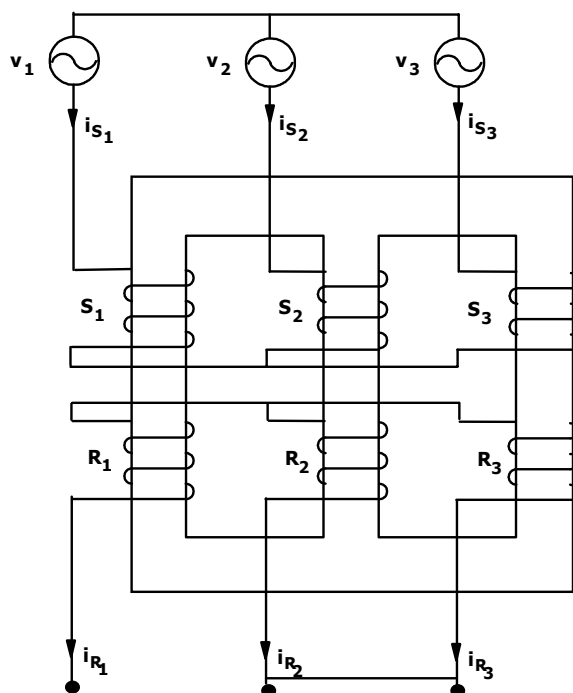


Fig. 3.18 – Transformador trifásico com um curto-circuito na saída de duas fases.

É estabelecido um curto circuito entre as fases 2 e 3 do secundário. Determinar a expressão da corrente de curto circuito, empregando a transformação $\alpha\beta 0$, sabendo que:

$$v_1 = V \cos \omega t$$

$$v_2 = V \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$v_3 = V \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$
