

## 4.1 INTRODUÇÃO

A transformação de PARK tem uma importância muito grande no estudo das máquinas elétricas. Consiste de uma transformação linear que simplifica as equações das máquinas, introduzindo um conjunto de variáveis hipotéticas.

Fisicamente, transforma a máquina bifásica com enrolamentos estáticos fixos e enrolamentos rotóricos girantes, em enrolamentos estáticos fixos e rotóricos pseudo-estacionários.

## 4.2 OBTENÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE PARK

Foi demonstrado no capítulo 3, que sob a transformação  $\alpha\beta 0$ , os fluxos e as correntes ficam relacionados pelas equações (4.1).

$$\begin{bmatrix} \phi_{S_0} \\ \phi_{S_\alpha} \\ \phi_{S_\beta} \\ \phi_{R_0} \\ \phi_{R_\alpha} \\ \phi_{R_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 & 0 & m_{SR} \cos \theta & -m_{SR} \sin \theta \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{L}_{R_0} & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} \cos \theta & m_{SR} \sin \theta & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & -m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta & 0 & 0 & \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \\ i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Os fluxos estáticos podem ser reescritos segundo a expressão (4.2).

$$\begin{bmatrix} \phi_{S_0} \\ \phi_{S_\alpha} \\ \phi_{S_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} \cos \theta & -m_{SR} \sin \theta \\ 0 & m_{SR} \sin \theta & m_{SR} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_0} \\ i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Vamos definir um novo conjunto de correntes rotóricas, segundo a expressão (4.3):

$$\begin{bmatrix} \phi_{R_0} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{R_0} \\ \phi_{R_\alpha} \\ \phi_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Assim:

$$\mathbf{i}_{R_{dq0}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta0}} \quad (4.4)$$

onde:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A matriz  $\mathbf{B}^{-1}$  define a transformação de PARK.

### 4.3 PROPRIEDADES DA TRANSFORMAÇÃO DE PARK

---

Vamos representar a expressão (4.1) na forma compacta, segundo as expressões (4.6) e (4.7), ignorando as componentes homopolares, que não serão alteradas pela transformação de PARK.

$$\phi_{S_{\alpha\beta}} = \mathbb{L}_S \mathbb{I} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} + m_{SR} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} \quad (4.6)$$

$$\phi_{R_{\alpha\beta}} = \mathbb{L}_R \mathbb{I} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} + m_{SR} \mathbf{B} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} \quad (4.7)$$

onde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Aplicando-se a transformação  $\mathbf{B}^{-1}$  na equação (4.7), obtém-se:

$$\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\phi}_{R_{\alpha\beta}} = m_{SR} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} + \mathbb{L}_R \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.10)$$

Assim:

$$\boldsymbol{\phi}_{R_{dq}} = m_{SR} \mathbb{I} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} + \mathbb{L}_R \mathbb{I} \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.11)$$

A partir da expressão (4.6) obtém-se:

$$\boldsymbol{\phi}_{S_{\alpha\beta}} = m_{SR} \mathbb{I} \mathbf{i}_{R_{dq}} + \mathbb{L}_S \mathbb{I} \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} \quad (4.12)$$

Reunindo-se as equações (4.11) e (4.12) e representando-se na forma matricial, encontra-se a expressão (4.13).

$$\begin{bmatrix} \phi_{S_0} \\ \phi_{S_\alpha} \\ \phi_{S_\beta} \\ \phi_{R_0} \\ \phi_{R_d} \\ \phi_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{S_0} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 & | & 0 & m_{SR} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{L}_S & | & 0 & 0 & m_{SR} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \mathbb{L}_{R_0} & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} & 0 & | & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & 0 & m_{SR} & | & 0 & 0 & \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_0} \\ i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \\ i_{R_0} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A expressão (4.13) mostra que as submatrizes indutâncias são diagonalizadas pela transformação de PARK.

Convém chamar atenção para o fato de que as variáveis estatóricas não foram transformadas; somente as variáveis rotóricas sofreram a ação da transformação de PARK.

Fazendo-se o produto  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}$  obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Portanto a transformação de PARK, como foi definida é ortogonal. Por isto, sob esta transformação, a potência é invariante.

#### 4.4 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA TRANSFORMAÇÃO DE PARK

Para interpretarmos fisicamente a transformação de PARK, vamos considerar os sistemas de eixos representados na Fig. 4.1.

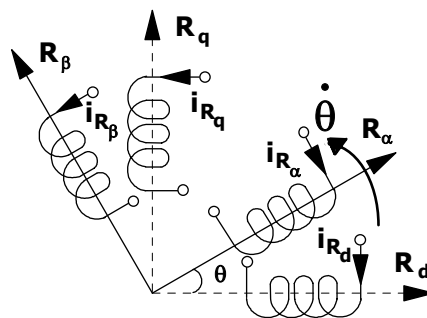


Fig. 4.1 – Sistemas de eixo representando a transformada de Park.

Os eixos  $R_\alpha R_\beta$  giram no sentido anti-horário com velocidade  $\dot{\theta}$ . Os eixos  $R_d R_q$  estão em repouso. Tem-se assim dois enrolamentos girando, com correntes  $i_{R_\alpha}$  e  $i_{R_\beta}$  e dois estacionários com correntes  $i_{R_d}$  e  $i_{R_q}$ . Todos os enrolamentos são considerados idênticos.

Decompondo-se as forças magnetomotrizes dos enrolamentos girantes segundo os eixos fixos e dividindo-se pelo número de espiras, encontra-se as relações (4.15) e (4.16).

$$i_{R_d} = i_{R_\alpha} \cos \theta - i_{R_\beta} \sin \theta \quad (4.15)$$

$$i_{R_q} = i_{R_\alpha} \sin \theta + i_{R_\beta} \cos \theta \quad (4.16)$$

Na forma matricial obtém-se a expressão (4.17), que é a própria transformação de PARK:

$$\begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Pode-se estabelecer assim que a transformação de PARK permite converter um conjunto de enrolamentos girantes num conjunto de enrolamentos fixos, produzindo os mesmos efeitos. As correntes dos enrolamentos fixos terão frequência diferente das correntes dos enrolamentos girantes.

A transformação de enrolamentos fixos em girantes coloca em evidência a seguinte questão: os enrolamentos do rotor são fixos, mas o rotor encontra-se em movimento. Isto só é possível numa máquina a comutador. Assim, a transformação de PARK transforma enrolamentos comuns, alimentado através de anéis, em enrolamentos alimentados através de escovas e comutador, que são também conhecidos com o nome de enrolamentos pseudo-estacionários. Desse modo a transformação de PARK pode ser realizada fisicamente. Na Fig. 4.2 está representada a transformação física.

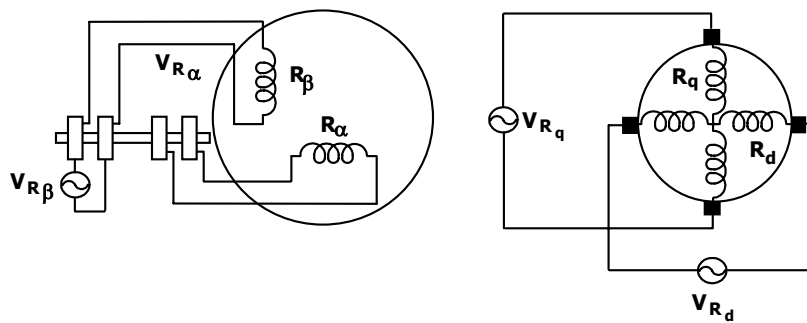


Fig. 4.2 – Representação física da transformada de Park.

Simbolicamente, a máquina antes e depois da transformação está representada na Fig. 4.3 e Fig. 4.4.

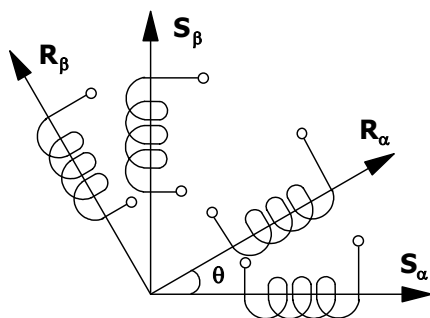


Fig. 4.3 – Máquina original.

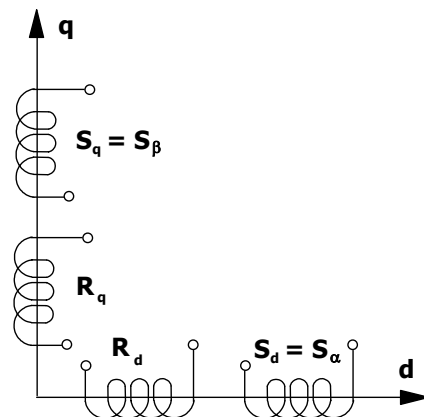


Fig. 4.4 – Máquina transformada.

## 4.5 TENSÕES DA MÁQUINA SOB A FORMA DE VARIÁVEIS DE PARK

O modelo elétrico em variáveis  $\alpha\beta$  é representado pelas equações (4.18) e (4.19).

$$\mathbf{v}_{S_{\alpha\beta}} = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} + \frac{d}{dt} \phi_{S_{\alpha\beta}} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{v}_{R_{\alpha\beta}} = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} + \frac{d}{dt} \phi_{R_{\alpha\beta}} \quad (4.19)$$

Aplicando-se a matriz  $\mathbf{B}^{-1}$  na expressão (4.19) obtém-se a expressão (4.20).

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}_{R_{\alpha\beta}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_R \mathbf{B} \mathbf{i}_{R_{dq}} + \mathbf{B}^{-1} \frac{d(\mathbf{B} \phi_{R_{dq}})}{dt} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{v}_{R_{dq}} = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_{R_{dq}} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \frac{d\phi_{R_{dq}}}{dt} + \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \theta} \phi_{R_{dq}} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Assim:

$$\mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{v}_{R_{dq}} = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_{R_{dq}} + \frac{d\phi_{R_{dq}}}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \phi_{R_{dq}} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{v}_{S_{dq}} = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_{S_{dq}} + \frac{d\phi_{S_{dq}}}{dt} \quad (4.25)$$

As expressões (4.25) e (4.24) podem ser reescritas segundo as expressões (4.26) e (4.27) respectivamente.

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 0 \\ 0 & R_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pL_S & 0 \\ 0 & pL_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d} \\ \dot{i}_{S_q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pm_{SR} & 0 \\ 0 & pm_{SR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_R & 0 \\ 0 & R_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} m_{SR} & 0 & | & L_R & 0 \\ 0 & m_{SR} & | & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{SR} & 0 & | & L_R & 0 \\ 0 & m_{SR} & | & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Resumindo-se as expressões (4.26) e (4.27), encontra-se as equações (4.28).

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & 0 & | & pm_{SR} & 0 \\ 0 & R_S + pL_S & | & 0 & pm_{SR} \\ \hline pm_{SR} & m_{SR} \dot{\theta} & | & R_R + pL_R & L_R \dot{\theta} \\ -m_{SR} \dot{\theta} & pm_{SR} & | & -L_R \dot{\theta} & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

As expressões (4.28) representam as equações elétricas da máquina simétrica trifásica (ou polifásica), com o referencial colocado no estator. Está sendo considerada uma máquina de dois pólos. A generalização para um número genérico de pares de pólos será apresentada mais adiante. As componentes homopolares quando existirem, poderão ser adicionadas nas equações (4.28).

Estas equações são muito importantes e são capazes de representar a máquina sob não importa qual condição de operação.

## 4.6 EXPRESSÃO DO TORQUE

Foi estabelecida a expressão do torque, com a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}}^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} \quad (4.29)$$

mas,

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta) = m_{SR} \mathbf{B}^{-1} \quad (4.30)$$

Portanto:

$$T = m_{SR} \mathbf{i}_{s_{\alpha\beta}}^t \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} \quad (4.31)$$

$$T = m_{SR} \mathbf{i}_{s_{dq}}^t \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{B} \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta & -\text{cos } \theta \\ \text{cos } \theta & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta & -\text{cos } \theta \\ \text{cos } \theta & -\text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{cos } \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \text{cos } \theta \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Assim:

$$T = m_{SR} \mathbf{i}_{s_{dq}}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.36)$$

$$T = m_{SR} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d} & \dot{i}_{S_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{R_d} \\ \dot{i}_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$T = m_{SR} (\dot{i}_{S_q} \dot{i}_{R_d} - \dot{i}_{S_d} \dot{i}_{R_q}) \quad (4.38)$$

## 4.7 EQUAÇÕES COMPLETAS DA MÁQUINA

---

O modelo completo para a máquina de indução, com  $n$  pares de pólos é representado pelas equações (4.39) e (4.40). Será considerada uma máquina em que  $v_{R_d} = v_{R_q} = 0$  (rotor em curto-circuito).

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & 0 & pm_{SR} & 0 \\ 0 & R_S + pL_S & 0 & pm_{SR} \\ pm_{SR} & n\dot{\theta}m_{SR} & R_R + pL_R & n\dot{\theta}L_R \\ -n\dot{\theta}m_{SR} & pm_{SR} & -n\dot{\theta}L_R & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$T = nm_{SR} (i_{S_q} i_{R_d} - i_{S_d} i_{R_q}) \quad (4.40)$$

$$n = \frac{\omega}{\omega_s} \quad (4.41)$$

onde:

$\omega \Rightarrow$  Pulsção das tensões de alimentação.

$\omega_s \Rightarrow$  Velocidade síncrona do motor.

## 4.8 GENERALIZAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE PARK

Neste item será estabelecido o modelo de PARK da máquina simétrica, para um sistema de eixos de referência girando com velocidade qualquer, representado na Fig. 4.5.

Os enrolamentos do estator,  $S_\alpha$  e  $S_\beta$  estão em repouso. Os enrolamentos do rotor,  $R_\alpha$  e  $R_\beta$  giram com velocidade  $\dot{\theta}$ . Os eixos  $d_q$  giram com velocidade  $\dot{\Psi}$ . Todos os enrolamentos possuem o mesmo número de espiras.



I ) Referencial no estator ( $\Psi = 0$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d} \\ \dot{i}_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_\alpha} \\ \dot{i}_{S_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{R_d} \\ \dot{i}_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{R_\alpha} \\ \dot{i}_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

II ) Referencial no rotor ( $\Psi = \theta$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d} \\ \dot{i}_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_\alpha} \\ \dot{i}_{S_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{R_d} \\ \dot{i}_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{R_\alpha} \\ \dot{i}_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

III ) Referencial no campo girante

$$\Psi = \omega_s t \quad (4.52)$$

$$\theta = \omega_m t \quad (4.53)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d} \\ \dot{i}_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_s t & \text{sen}\omega_s t \\ -\text{sen}\omega_s t & \cos\omega_s t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_\alpha} \\ \dot{i}_{S_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{R_d} \\ \dot{i}_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_s - \omega_m)t & \text{sen}(\omega_s - \omega_m)t \\ -\text{sen}(\omega_s - \omega_m)t & \cos(\omega_s - \omega_m)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{R_\alpha} \\ \dot{i}_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

## 4.9 EQUAÇÕES DA MÁQUINA SIMÉTRICA NUM SISTEMA DE EIXOS GENÉRICOS

---

Sejam as transformações definidas pelas expressões (4.56) e (4.57).

$$\mathbf{B}_S^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \text{sen } \Psi \\ -\text{sen } \Psi & \cos \Psi \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{B}_R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi - \theta) & \text{sen}(\Psi - \theta) \\ -\text{sen}(\Psi - \theta) & \cos(\Psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Sejam as equações elétricas da máquina, sob a forma de variáveis  $\alpha\beta$ , representadas pelas expressões (4.58) e (4.59).

$$\mathbf{v}_{S_{\alpha\beta}} = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} + \frac{d\phi_{S_{\alpha\beta}}}{dt} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{v}_{R_{\alpha\beta}} = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} + \frac{d\phi_{R_{\alpha\beta}}}{dt} \quad (4.59)$$

Vamos aplicar a transformação  $\mathbf{B}_S^{-1}$  na equação (4.58).

$$\mathbf{B}_S^{-1} \mathbf{v}_{S_{\alpha\beta}} = \mathbf{B}_S^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} + \mathbf{B}_S^{-1} \frac{d\phi_{S_{\alpha\beta}}}{dt} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{v}_{S_{dq}} = \mathbf{B}_S^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{B}_S \mathbf{i}_{S_{dq}} + \mathbf{B}_S^{-1} \frac{d(\mathbf{B}_S \phi_{S_{dq}})}{dt} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{B}_S^{-1} \mathbf{R}_S \mathbf{B}_S = \mathbf{R}_S \quad (4.62)$$

$$\mathbf{B}_S^{-1} \frac{d\mathbf{B}_S \phi_{S_{dq}}}{dt} = \mathbf{B}_S^{-1} \mathbf{B}_S \frac{d\phi_{S_{dq}}}{dt} + \mathbf{B}_S^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}_S}{\partial \Psi} \phi_{S_{dq}} \dot{\Psi} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{B}_S^{-1} \frac{d\mathbf{B}_S}{d\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Levando-se (4.62), (4.63) e (4.64) em (4.61) obtém-se:

$$\mathbf{v}_{S_{dq}} = \mathbf{R}_S \mathbf{i}_{S_{dq}} + \frac{d\phi_{S_{dq}}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\Psi} \phi_{S_{dq}} \quad (4.65)$$

Adotando-se procedimento análogo para a equação elétrica do rotor, obtém-se:

$$\mathbf{v}_{R_{dq}} = \mathbf{R}_R \mathbf{i}_{R_{dq}} + \frac{d\phi_{R_{dq}}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) \phi_{R_{dq}} \quad (4.66)$$

Em seguida será deduzida a expressão do torque:

$$T = \mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}}^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}} = \mathbf{B}_S \mathbf{i}_{S_{dq}} \quad (4.68)$$

Assim:

$$\mathbf{i}_{S_{\alpha\beta}}^t = \mathbf{i}_{S_{dq}}^t \mathbf{B}_S^t \quad (4.69)$$

$$\mathbf{i}_{R_{\alpha\beta}} = \mathbf{B}_R \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.70)$$

Assim:

$$T = \mathbf{i}_{S_{dq}}^t \mathbf{B}_S^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{B}_R \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.71)$$

mas,

$$\mathbf{L}_{SR}(\theta) = m_{SR} \mathbf{B}^{-1} \quad (4.72)$$

Assim:

$$T = m_{SR} \mathbf{i}_{S_{dq}}^t \mathbf{B}_S^t \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \theta} \mathbf{B}_R \mathbf{i}_{R_{dq}} \quad (4.73)$$

Assim:

$$T = m_{SR} (i_{R_d} i_{S_d} - i_{R_q} i_{S_q}) \quad (4.74)$$

Reunindo-se as equações (4.65), (4.66) e (4.74), desenvolvendo-se e generalizando-se para  $n$  pares de pólos, obtém-se o modelo representado pelas equações (4.75) e (4.76). Para o rotor em curto, basta fazer  $v_{R_d} = v_{R_q} = 0$ .

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & -L_S \dot{\Psi} n & pm_{SR} & -m_{SR} \dot{\Psi} n \\ L_S \dot{\Psi} n & R_S + pL_S & m_{SR} \dot{\Psi} n & pm_{SR} \\ pm_{SR} & -m_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & R_R + pL_R & -L_R n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) \\ m_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & pm_{SR} & L_R n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$T = n m_{SR} (i_{S_q} i_{R_d} - i_{S_d} i_{R_q}) \quad (4.76)$$

Quando a velocidade do motor varia com o tempo, as equações elétricas da máquina são não-lineares. Para velocidade constante, o modelo torna-se linear.

Em qualquer das situações, a equação mecânica é não-linear, pois aparece o produto de duas correntes.

O modelo obtido representa a máquina para qualquer situação e para qualquer referencial.

## 4.10 MODELO DQ REFERIDO AO PRIMÁRIO

Ao se estabelecer as equações da máquina simétrica representadas pelas equações (4.75) e (4.76), não se fez referências à relação de transformação entre os enrolamentos estáticos e rotóricos. Assim, ao se empregar as referidas equações, deve-se empregar os parâmetros do estator medidos no estator e os do rotor medidos no lado do rotor.

Porém, quando se trata de uma máquina com rotor em gaiola, não se tem acesso ao rotor. Todos os parâmetros são referidos ao estator. Por isto as equações da máquina devem ser desenvolvidas para permitir o emprego desses parâmetros medidos em relação a um só lado.

Para realizar tal modificação, será aplicada a transformação primária-secundária, que será apresentada com detalhes no capítulo 7, e que aqui está representada pela expressão (4.77):

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v'_{R_d} \\ v'_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Assim:

$$[v_{SR}'] = \mathbf{PS}^{-1} [v_{SR}] \quad (4.78)$$

Onde  $a$  é a relação entre o número de espiras do estator e o número de espiras do rotor.

A matriz  $\mathbf{PS}^{-1}$  refere todas as tensões ao estator.

Para as correntes, a transformação é dada pela expressão (4.79).

$$\begin{bmatrix} i'_{S_d} \\ i'_{S_q} \\ i'_{R_d} \\ i'_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{i}_{SR}' = \mathbf{PS} \mathbf{i}_{SR} \quad (4.80)$$

Em seguida a transformação será aplicada nas equações da máquina.

$$\mathbf{v}_{SR}' = \mathbf{Z} \mathbf{i}_{SR} \quad (4.81)$$

$$\mathbf{PS} \mathbf{v}_{SR}' = \mathbf{ZPS}^{-1} \mathbf{i}_{SR}' \quad (4.82)$$

$$\mathbf{v}_{SR}' = \mathbf{P}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{i}_{SR}' \quad (4.83)$$

onde  $\mathbf{Z}$  é dada pela expressão (4.84).

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} R_S + p\mathbb{L}_S & -\mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & pm_{SR} & -m_{SR} \dot{\Psi} n \\ \mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & R_S + p\mathbb{L}_S & m_{SR} \dot{\Psi} n & pm_{SR} \\ \hline pm_{SR} & -m_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & R_R + p\mathbb{L}_R & -\mathbb{L}_R n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) \\ m_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & pm_{SR} & \mathbb{L}_R n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) & R_R + p\mathbb{L}_R \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Realizando o produto matricial determinado pela expressão (4.83), encontramos as equações representadas pela expressão (4.85).

Quando os parâmetros são obtidos por ensaio, a relação de transformação é desconhecida. Isto não apresenta dificuldade na análise, uma vez que eles serão determinados em relação ao estator. Desse modo todas as grandezas rotóricas, como tensão e corrente, ficam determinadas também referidas ao estator.

$$\begin{bmatrix} \frac{V_{S_d}}{n} \\ \frac{V_{S_q}}{n} \\ \frac{V_{R_d}}{n} \\ \frac{V_{R_q}}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + p\mathbb{L}_S & -\mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & p(am_{SR}) & -(am_{SR}) \dot{\Psi} n \\ \mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & R_S + p\mathbb{L}_S & (am_{SR}) \dot{\Psi} n & p(am_{SR}) \\ \hline p(am_{SR}) & -am_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & a^2 (R_R + p\mathbb{L}_R) & -n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) a^2 \mathbb{L}_R \\ am_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & p(am_{SR}) & n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) a^2 \mathbb{L}_R & a^2 (R_R + p\mathbb{L}_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i_{S_d}}{n} \\ \frac{i_{S_q}}{n} \\ \frac{i_{R_d}}{n} \\ \frac{i_{R_q}}{n} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Através de ensaios clássicos, a vazio e em curto-circuito, pode-se determinar os parâmetros elétricos.

- 1)  $am_{SR} = m_1 \Rightarrow$  indutância magnetizante medida em relação ao estator.
- 2)  $\mathbb{L}_S = \ell_1 + m_1 \Rightarrow$  sendo  $\ell_1$  a indutância de dispersão do estator.

- 3)  $a^2 \mathbb{L}_R = \ell_2 + m_1 = \mathbb{L}_R'$   $\Rightarrow$  sendo  $\ell_1$  a indutância de dispersão do rotor referida ao estator.
- 4)  $R_S$   $\Rightarrow$  resistência do estator.
- 5)  $a^2 R_R = R_R'$   $\Rightarrow$  resistência do rotor referida ao estator.

Desse modo as equações elétricas passam a ser representadas pela expressão (4.86):

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} R_S + p\mathbb{L}_S & -\mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & pm_1 & -m_1 \dot{\Psi} n \\ \mathbb{L}_S \dot{\Psi} n & R_S + p\mathbb{L}_S & m_1 \dot{\Psi} n & pm_1 \\ \hline pm_1 & -m_1 (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & R_R' + p\mathbb{L}_R' & -n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) \mathbb{L}_R' \\ m_1 (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) n & pm_1 & n (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) \mathbb{L}_R' & R_R' + p\mathbb{L}_R' \end{array} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$T = nm_1 (i_{S_q} i_{R_d}' - i_{S_d} i_{R_q}') \quad (4.87)$$

O torque fica representado pela expressão (4.87).

## 4.11 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Seja:

$$v_{S_1} = \sqrt{2} V \text{sen}(\omega_s t + \theta)$$

$$v_{S_2} = \sqrt{2} V \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \theta)$$

$$v_{S_3} = \sqrt{2} V \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \theta)$$

Determinar  $v_{S_0}$ ,  $v_{S_d}$  e  $v_{S_q}$  para o referencial colocado no estator e colocado no campo girante.

2) Um motor de indução é alimentado por um inversor do tipo  $180^\circ$ . As formas de onda impostas em cada fase estão representadas abaixo. Obter e representar graficamente as tensões  $v_{S_0}$ ,  $v_{S_d}$  e  $v_{S_q}$ .

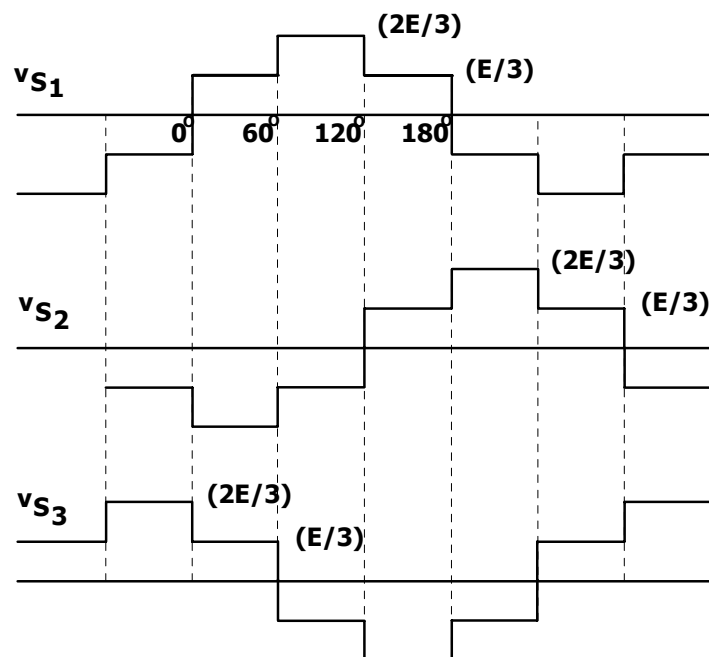


Fig. 4.6 – Formas de onda impostas as fases de um motor trifásico.

3) Obter o modelo de estado do motor de indução, para um referencial genérico, em termos de variáveis dq.

---

4) Considere o modelo do motor de indução com referencial no campo girante. Seja:

$$v_{S_1} = \sqrt{2}V \text{sen} \omega_s t$$

$$v_{S_2} = \sqrt{2}V \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ)$$

$$v_{S_3} = \sqrt{2}V \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ)$$

Consideremos o motor em regime permanente.

(a) As tensões  $v_{S_d}$  e  $v_{S_q}$  são funções do tempo? Por que?

(b) As correntes  $i_{S_d}$ ,  $i_{S_q}$ ,  $i_{R_d}$  e  $i_{R_q}$  são funções do tempo? Por que?

---

5) Seja o enrolamento trifásico rotórico de uma máquina de indução, girando no sentido anti-horário em relação ao estator. Seja:

$$v_{R_1} = \sqrt{2}V_R \text{sen}(\omega_R t + \Delta)$$

$$v_{R_2} = \sqrt{2}V_R \text{sen}(\omega_R t - 120^\circ + \Delta)$$

$$v_{R_3} = \sqrt{2}V_R \text{sen}(\omega_R t + 120^\circ + \Delta)$$

Seja  $\omega_R + \omega_m = \omega_s$  onde:

$\omega_m \Rightarrow$  velocidade do rotor

$\omega_s \Rightarrow$  pulsação das correntes do estator

$\omega_R \Rightarrow$  pulsação das correntes do rotor

a) Determinar as tensões  $v_{R_\alpha}$ ,  $v_{R_\beta}$  e  $v_{R_\gamma}$ . Qual a frequência dessas tensões?

b) Determinar as tensões  $v_{R_0}$ ,  $v_{R_d}$  e  $v_{R_q}$  para um referencial colocado no estator. Qual a frequência dessas tensões?

Supor em seguida que:

$$v_{R_1} = \sqrt{2}V_R \text{sen}(\omega_R t + \Delta)$$

$$v_{R_2} = \sqrt{2}V_R \text{sen}(\omega_R t + 120^\circ + \Delta)$$

$$v_{R_3} = \sqrt{2}V_R \text{sen}(\omega_R t - 120^\circ + \Delta)$$

Repetir as questões a) e b). A frequência das tensões mudou? Por que?

---

6) Seja uma máquina de indução trifásica onde:

$$\theta = \omega_m t + \theta_0$$

$$\omega_s = \omega_m + \omega_R$$

$$i_{S_1} = I_s \text{sen}(\omega_s t + \phi)$$

$$i_{S_2} = I_s \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \phi)$$

$$i_{S_3} = I_s \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \phi)$$

$$i_{R_1} = I_R \text{sen}(\omega_R t + \Delta)$$

$$i_{R_2} = I_R \text{sen}(\omega_R t - 120^\circ + \Delta)$$

$$i_{R_3} = I_R \text{sen}(\omega_R t + 120^\circ + \Delta)$$

Determinar a expressão do torque desenvolvido pela máquina, partindo da expressão:

$$T = m_{SR} (i_{Sq} i_{Rd} - i_{Sd} i_{Rq})$$


---

7) Um motor de indução pode ser empregado como freio, impondo-se a seguinte alimentação:

- (a) a fase  $\alpha$  do estator é alimentada por uma corrente contínua  $I_{CC}$ .
- (b) a fase  $\beta$  do estator é mantida aberta.

Nessas condições, empregando o modelo de PARK com referencial no estator, determinar:

- (a) a expressão do torque desenvolvido pelo motor em função da velocidade.
  - (b) a velocidade, em função dos parâmetros da máquina, para a qual o torque é máximo.
  - (c) a expressão do torque máximo.
- 

8) Considere o modelo de PARK motor de indução com o referencial no campo girante. Seja uma fonte que imponha as correntes estatóricas do motor. Assim:

$$i_{Sd} = I_s \sin \omega_s t$$

$$i_{Sq} = I_s \cos \omega_s t$$

Determinar as expressões das correntes  $i_{Rd}$  e  $i_{Rq}$  e do torque desenvolvido pelo motor.

---

9) Considere um motor de indução de rotor bobinado em repouso. No instante  $t = 0$  as três fases do estator são subitamente alimentadas com tensões senoidais balanceadas. Determinar a evolução das tensões rotóricas em função do tempo. Considerar os enrolamentos rotóricos abertos.

---

10) Considere uma máquina de indução bifásica com rotor em gaiola. A fase d é alimentada por uma tensão do tipo:

$$v_{s_d} = \sqrt{2}V \text{ sen } \omega_s t$$

A fase q é mantida aberta. A máquina é acionada por um motor auxiliar.

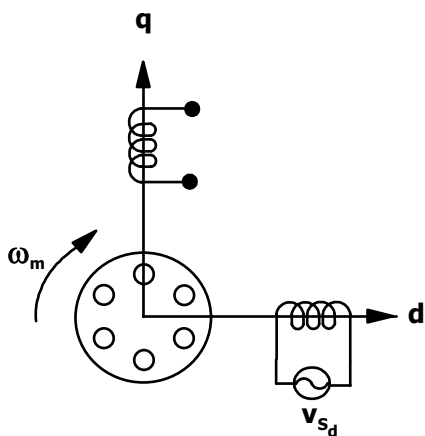


Fig. 8.7 – Máquina de indução bifásica com rotor em gaiola.

Demonstrar que a tensão  $v_{s_q}$  é função da velocidade do rotor. Que condições devem ser satisfeitas para que a relação entre  $v_{s_q}$  e  $\omega_m$  seja linear ?

Empregar as equações de PARK para o referencial colocado no estator. Este sistema é conhecido como tacogerador de indução. A sua característica principal é o fato da tensão gerada  $v_{s_q}$  apresentar frequência constante, igual à frequência da tensão  $v_{s_d}$  de excitação.

11) Refazer o exercício número 10, supondo que o enrolamento d do estator é alimentado por uma fonte que lhe impõe uma corrente senoidal.

12) Refazer o exercício número 10, supondo que o enrolamento d é alimentado por uma corrente contínua.