

5.1 INTRODUÇÃO

O emprego das componentes simétricas instantâneas permite a obtenção de modelos mais simples que aqueles obtidos com a transformação de PARK. Esses novos modelos são adequados para estudos analíticos para as situações em que a máquina gira em velocidade constante.

5.2 OBTENÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO COMPONENTES SIMÉTRICAS INSTANTÂNEAS

Vamos considerar o modelo estabelecido no capítulo IV e representado pelas equações (5.1).

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & -L_S \dot{\Psi} & pm_{SR} & -m_{SR} \dot{\Psi} \\ L_S \dot{\Psi} & R_S + pL_S & m_{SR} \dot{\Psi} & pm_{SR} \\ pm_{SR} & -m_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) & R_R + pL_R & -L_R (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) \\ m_{SR} (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) & pm_{SR} & L_R (\dot{\Psi} - \dot{\theta}) & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Verifica-se que cada submatriz da matriz é do tipo representado pela expressão (5.2).

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Vamos determinar uma transformação que diagonalize a matriz \mathbf{Z} . Tomando-se:

$$(a - \lambda)(a - \lambda) + b^2 = 0 \quad (5.3)$$

encontra-se:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + jb \\ \lambda_2 &= a - jb \end{aligned} \quad (5.4)$$

que são os autovalores da matriz \mathbf{Z} .

A seguir são calculados os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 .

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} = (a + jb) \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$az_{11} - bz_{21} = (a + jb)z_{11} \quad (5.6)$$

Assim:

$$z_{21} = -jz_{11} \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix} = (a - jb) \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$az_{12} - bz_{22} = (a - jb)z_{12} \quad (5.9)$$

Assim:

$$z_{22} = jz_{12} \quad (5.10)$$

Assim os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são respectivamente:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} z \\ -jz \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

e

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} z \\ jz \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Consequentemente, a matriz [\mathbf{D}_2] que diagonaliza a matriz \mathbf{Z} é dada pela expressão (5.13).

$$\mathbf{D}_2 = z \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Para que a transformação mantenha invariante a potência, ela deve ser unitária. Assim:

$$\mathbf{D}_2^t = (\mathbf{D}_2^{-1})^* \quad (5.14)$$

ou

$$\mathbf{D}_2^{-1} = (\mathbf{D}_2^t)^* \quad (5.15)$$

onde a matriz inversa é igual à transposta conjugada.

A partir de (5.13), obtém-se:

$$\mathbf{D}_2^t = z \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$(\mathbf{D}_2^{-1})^* = \frac{1}{2z} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Para que a relação (5.14) se verifique é necessário que:

$$z = \frac{1}{2z} \quad (5.18)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.19)$$

Assim:

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{D}_2^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Conhecendo-se as expressões de $[\mathbf{D}_2]$ e $[\mathbf{D}_2^{-1}]$, pode-se diagonalizar a matriz \mathbf{Z} , com o emprego da expressão (5.22).

$$\mathbf{Z}_d = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{D}_2 \quad (5.22)$$

Assim:

$$\mathbf{Z}_d = \begin{bmatrix} a + jb & 0 \\ 0 & a - jb \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

como era de se esperar, pois os termos que aparecem são os autovalores da matriz \mathbf{Z} .

Sabe-se que:

$$\mathbf{v}_{dq} = \mathbf{z}_{dq} \mathbf{i}_{dq} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{v}_{+-} = \mathbf{z}_{+-} \mathbf{i}_{+-} \quad (5.25)$$

onde a notação $[+-]$ refere-se às componentes simétricas instantâneas, obtidas a partir das componentes de PARK.

Sabemos que:

$$\mathbf{Z}_{+-} = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_{dq} \mathbf{D}_2 \quad (5.26)$$

Assim

$$\mathbf{v}_{+-} = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_{dq} \mathbf{D}_2 \mathbf{i}_{+-} \quad (5.27)$$

ou

$$\mathbf{D}_2 \mathbf{v}_{+-} = \mathbf{Z}_{dq} \mathbf{D}_2 \mathbf{i}_{+-} \quad (5.28)$$

Comparando-se (5.28) com (5.24) obtém-se:

$$\mathbf{v}_{dq} = \mathbf{D}_2 \mathbf{v}_{+-} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{v}_{+-} = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{v}_{dq} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{i}_{dq} = \mathbf{D}_2 \mathbf{i}_{+-} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{i}_{+-} = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{i}_{dq} \quad (5.32)$$

Assim, a matriz \mathbf{D}_2^{-1} transforma as variáveis de Park (dq) em componentes simétricas instantâneas (+-).

Pode-se assim estabelecer a expressão (5.33).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{S_+} \\ \mathbf{v}_{S_-} \\ \mathbf{v}_{R_+} \\ \mathbf{v}_{R_-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ 1 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{S_d} \\ \mathbf{v}_{S_q} \\ \mathbf{v}_{R_d} \\ \mathbf{v}_{R_q} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

A mesma transformação pode ser empregada nas demais variáveis da máquina, como fluxos e correntes.

Quando se trata de transformação trifásica, a forma empregada é a representada pela expressão (5.34).

$$\mathbf{D}_2^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & 1 & -j \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

5.3 EQUAÇÕES DAS TENSÕES

Definimos anteriormente a transformação componentes simétricas instantâneas. Vamos a seguir aplicá-la na obtenção de um novo modelo para a máquina simétrica.

As equações (5.1) podem ser reescritas segundo as equações .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{S_{dq}} \\ \mathbf{v}_{R_{dq}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_3 \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{S_{dq}} \\ \mathbf{i}_{R_{dq}} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{S_{+-}} \\ \mathbf{v}_{R_{+-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_3 \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{S_{+-}} \\ \mathbf{i}_{R_{+-}} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Podemos então estabelecer que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{S_{+-}} \\ \mathbf{v}_{R_{+-}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_3 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_2 \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_4 \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{S_{+-}} \\ \mathbf{i}_{R_{+-}} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Cada submatriz da matriz impedância fica então diagonalizada. Assim:

$$\mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{D}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_s + \mathbb{L}_s(p + j\dot{\Psi}) & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{R}_s + \mathbb{L}_s(p - j\dot{\Psi}) \end{array} \right] \quad (5.38)$$

$$\mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_2 \mathbf{D}_2 = \left[\begin{array}{c|c} m_{SR}(p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) & 0 \\ \hline 0 & m_{SR}(p - j\dot{\Psi} + j\dot{\theta}) \end{array} \right] \quad (5.39)$$

$$\mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_3 \mathbf{D}_2 = \left[\begin{array}{c|c} m_{SR}(p + j\dot{\Psi}) & 0 \\ \hline 0 & m_{SR}(p - j\dot{\Psi}) \end{array} \right] \quad (5.40)$$

$$\mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{Z}_4 \mathbf{D}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_R + \mathbb{L}_R(p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{R}_R + \mathbb{L}_R(p - j\dot{\Psi} + j\dot{\theta}) \end{array} \right] \quad (5.41)$$

Levando-se as expressões (5.38) a (5.41) na expressão (5.37), obtém-se a expressão (5.42).

$$\begin{bmatrix} v_{S_+} \\ v_{S_-} \\ v_{R_+} \\ v_{R_-} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{R}_s + \mathbb{L}_s(p + j\dot{\Psi}) & 0 & m_{SR}(p + j\dot{\Psi}) & 0 & & \\ \hline 0 & \mathbf{R}_s + \mathbb{L}_s(p - j\dot{\Psi}) & 0 & m_{SR}(p - j\dot{\Psi}) & & \\ \hline m_{SR}(p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) & 0 & \mathbf{R}_R + \mathbb{L}_R(p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) & 0 & & \\ \hline 0 & m_{SR}(p - j\dot{\Psi} + j\dot{\theta}) & 0 & \mathbf{R}_R + \mathbb{L}_R(p - j\dot{\Psi} + j\dot{\theta}) & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_{S_+} \\ i_{S_-} \\ i_{R_+} \\ i_{R_-} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

A partir da expressão (5.33), constatamos que:

$$\mathbf{v}_{S_-} = \mathbf{v}_{S_+}^* \quad (5.43)$$

e

$$V_R = V_{R+}^* \quad (5.44)$$

Portanto as equações de seqüência negativa contém as mesmas informações que as de seqüência positiva e portanto serão desconsideradas. O modelo é representado pelas expressões (5.45)

$$\begin{bmatrix} V_{S+} \\ V_{R+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + \mathbb{L}_S (p + j\dot{\Psi}) & m_{SR} (p + j\dot{\Psi}) \\ m_{SR} (p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) & R_R + \mathbb{L}_R (p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S+} \\ i_{R+} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Fica assim estabelecido que a máquina, mesmo para uma situação genérica, fica representada por apenas duas equações. Isto é possível porque as variáveis são complexas e contém sempre duas informações, uma do eixo “d” e outra do eixo “q”.

5.4 EQUAÇÃO DO TORQUE

Foi demonstrado que o torque desenvolvido pela máquina é representado pela expressão

$$T = m_{SR} (i_{S_q} \cdot i_{R_d} - i_{S_d} \cdot i_{R_q}) \quad (5.46)$$

mas,

$$\begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S+} \\ i_{S-} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R+} \\ i_{R-} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Assim:

$$i_{S_d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i_{S_+} + i_{S_-}) \quad (5.49)$$

$$i_{S_q} = -\frac{j}{\sqrt{2}}(i_{S_+} - i_{S_-}) \quad (5.50)$$

$$i_{R_d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i_{R_+} + i_{R_-}) \quad (5.51)$$

$$i_{R_q} = -\frac{j}{\sqrt{2}}(i_{R_+} - i_{R_-}) \quad (5.52)$$

Substituindo-se as expressões (5.49) a (5.52) na expressão (5.46), obtém-se

$$T = m_{SR} (ji_{S_-} i_{R_+} - ji_{S_+} i_{R_-}) \quad (5.53)$$

$$T = m_{SR} (ji_{S_+}^* i_{R_-}^* - ji_{S_-} i_{R_+}) \quad (5.54)$$

$$T = m_{SR} j(i_{S_+}^* i_{R_-}^* - i_{S_-} i_{R_+}) \quad (5.55)$$

se

$$A = a + jb \quad (5.56)$$

e

$$A^* = a - jb \quad (5.57)$$

obtém-se

$$A^* - A = -2jb \quad (5.58)$$

portanto

$$j(A^* - A) = 2b \quad (5.59)$$

Assim:

$$T = 2 \cdot m_{SR} \cdot \text{Im}(i_{S_+} \cdot i_{R_-}) \quad (5.60)$$

$$T = 2 \cdot m_{SR} \cdot \text{Im}(i_{S_-} \cdot i_{R_+}) \quad (5.61)$$

Assim, o modelo final da máquina para “n” pares de pólos, é representado pelas equações

$$\begin{bmatrix} v_{S_+} \\ v_{R_+} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R_S + \mathbb{L}_S(p + jn\dot{\Psi}) & m_{SR}(p + jn\dot{\Psi}) \\ \hline m_{SR}(p + jn\dot{\Psi} - jn\dot{\theta}) & R_R + \mathbb{L}_R(p + jn\dot{\Psi} - jn\dot{\theta}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_{S_+} \\ i_{R_+} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$T = 2 \cdot n \cdot m_{SR} \cdot \text{Im}(i_{S_+} \cdot i_{R_-}) \quad (5.63)$$

O termo $\text{Im}(x)$ significa, parte imaginária de x .

Para o motor de indução com rotor em curto, toma-se a $v_{R_+} = 0$.

Para o referencial colocado no estator, toma-se $\dot{\Psi} = 0$.

5.5 INTERPRETAÇÃO DAS COMPONENTES SIMÉTRICAS INSTANTÂNEAS

Seja a Fig. 5.1

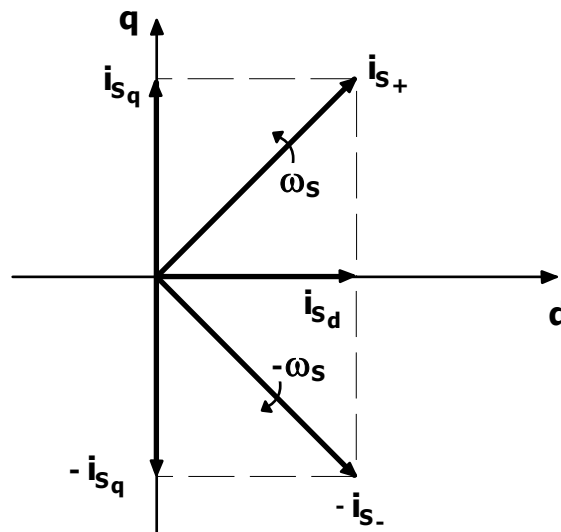


Fig. 5.1 – Representação das componentes simétricas.

como

$$i_{s_+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i_{s_d} + j i_{s_q}) \quad (5.64)$$

a corrente i_{s_+} é um fasor que instantaneamente assume um módulo dado por:

$$|i_{s_+}| = \sqrt{\frac{i_{s_d}^2}{2} + \frac{i_{s_q}^2}{2}} \quad (5.65)$$

Se as correntes i_{s_d} e i_{s_q} forem senoidais balanceadas da forma:

$$i_{s_d} = I \cdot \cos(\omega_s t) \quad (5.66)$$

e

$$i_{s_q} = I \cdot \text{sen}(\omega_s t) \quad (5.67)$$

obtem-se

$$i_{s_+} = \frac{I}{\sqrt{2}}(\cos(\omega_s t) + j \text{sen}(\omega_s t)) = \frac{I}{\sqrt{2}} e^{j\omega_s t} \quad (5.68)$$

Assim a corrente i_{s_+} possui módulo constante, e gira no sentido anti-horário com velocidade constante igual a ω_s .

A corrente i_{s_-} será da forma

$$i_{s_-} = \frac{I}{\sqrt{2}} e^{-j\omega_s t} \quad (5.69)$$

é igual em módulo à i_{s_+} mas gira em sentido oposto.

É preciso fazer uma cuidadosa distinção entre as componentes simétricas instantâneas definidas neste trabalho e as componentes simétricas tradicionais. As tradicionais são definidas para grandezas fasoriais e só são válidas no estudo de regimes permanentes. As instantâneas são válidas para qualquer situação.

5.6 MODELO PARA OS PARÂMETROS ROTÓRICOS REFERIDOS AO ESTATOR

A exemplo do que foi feito para o modelo de PARK obtido no capítulo IV, serão estabelecidas as equações da máquina para componentes simétricas instantâneas, representadas pelas expressões (5.70) e (5.71).

$$\begin{bmatrix} \frac{v_{s_+}}{v_{r_+}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R_s + \mathbb{L}_s (p + jn \dot{\Psi}) & m_1 (p + jn \dot{\Psi}) \\ \hline m_1 (p + jn \dot{\Psi} - jn \dot{\theta}) & R_{R'} + \mathbb{L}_{R'} (p + jn \dot{\Psi} - jn \dot{\theta}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_{s_+} \\ i_{r_+} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$T = 2 \cdot n \cdot m_1 \cdot \mathbb{I}(i_{s_+} \cdot i_{r_+}') \quad (5.71)$$

onde:

$$m_1 = a \cdot m_{SR} \quad (5.72)$$

$$R_R' = a^2 \cdot R_R \quad (5.73)$$

$$\mathbb{L}_R' = a^2 \cdot \mathbb{L}_R = l_2 + m_1 \quad (5.74)$$

$$\mathbb{L}_S = l_1 + m_1 \quad (5.75)$$

A obtenção dos parâmetros é conseguida através dos ensaios a vazio e em curto-circuito.

5.7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Considere um motor de indução operando com carga nominal. Subitamente as três fases são desconectadas simultaneamente da rede de alimentação. Determinar o comportamento da tensão do estator empregando o modelo deduzido para componentes simétricas instantâneas (ver item 8.3).

2) Seja um motor de indução alimentado por um inversor trifásico do tipo 180°. A tensão da fase 1 está representada na Fig. 5.2. As tensões das demais fases são idênticas mas defasadas de 120° e 240° em relação a primeira. Aplicando a transformação componentes simétricas instantâneas, obter a tensão v_{S_+} .

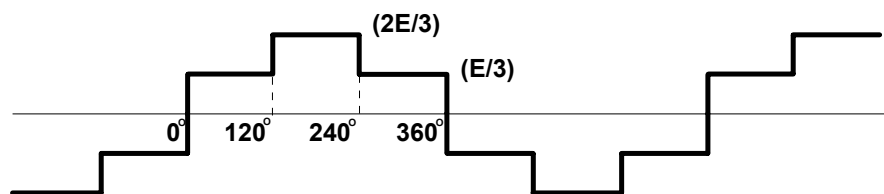


Fig. 5.2 – Forma de onda da tensão da fase 1.

3) Considere um motor de indução alimentado por um par de correntes balanceadas da forma:

$$i_{S_\alpha} = I_S \cdot \cos(\omega_s t) \quad (5.76)$$

$$i_{S_\beta} = I_S \cdot \text{sen}(\omega_s t) \quad (5.77)$$

Obter a expressão do torque médio e instantâneo que o motor produz. Considerar o referencial colocado no campo girante. Empregar o modelo deduzido para componentes simétricas instantâneas.

Obter também a expressão da tensão instantânea nos terminais dos enrolamentos do estator.

4) Considere uma máquina de indução trifásica com rotor bloqueado alimentado por tensões balanceadas.

$$v_{s_1} = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s t) \quad (5.78)$$

$$v_{s_2} = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s t - 120^\circ) \quad (5.79)$$

$$v_{s_3} = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s t + 120^\circ) \quad (5.80)$$

O motor possui 2 pólos.

Os enrolamentos rotóricos são mantidos abertos. Utilizando as componentes simétricas instantâneas, determinar as expressões matemáticas das correntes do estator.

5) Considere o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} v_{S_+} \\ v_{R_+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + \mathbb{L}_S (p + j\dot{\Psi}) & m_{SR} (p + j\dot{\Psi}) \\ m_{SR} (p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) & R_R + \mathbb{L}_R (p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_+} \\ i_{R_+} \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Estabelecer as expressões de i_{S_+} e i_{R_+} em função de v_{S_+} e v_{R_+} .
