

## INTRODUÇÃO

---

No desenvolvimento dos modelos para estudo do motor de indução, em regime permanente, será empregado o modelo geral representado pelas expressões (6.1) e (6.2) desenvolvidas no capítulo V.

$$\begin{bmatrix} v_{S_+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & pm_{SR} \\ m_{SR} \left( p - jn\dot{\theta} \right) & R_R + L_R \left( p - jn\dot{\theta} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_+} \\ i_{R_+} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$T = 2 \cdot n \cdot m_{SR} \operatorname{Im}(i_{S_+} \cdot i_{R_-}) \quad (6.2)$$

Será considerada alimentação senoidal desbalanceada tanto a nível da amplitude quanto a nível de fase. A partir das equações (6.1), com o emprego de variáveis instantâneas, extrai-se o modelo para variáveis fasoriais, empregado no estudo do motor em regime permanente.

O motor será considerado com velocidade constante tornando possível a superposição. Isto permitirá a generalização dos resultados par alimentação não senoidal, bastando para tanto empregar o modelo obtido para cada harmônica de alimentação.

## MODELO DO MOTOR DE INDUÇÃO PARA ESTUDO DO REGIME PERMANENTE

---

Seja a referência fixa no estator. Assim:

$$\begin{aligned}V_{S_d} &= V_{S_\alpha} \\V_{S_q} &= V_{S_\beta}\end{aligned}\tag{6.3}$$

Conhecendo-se as tensões de alimentação e aplicando-se a transformação  $\alpha\beta$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}v_\alpha &= v_\alpha \cos(\omega t + \theta_\alpha) \\v_\beta &= v_\beta \text{sen}(\omega t + \theta_\beta)\end{aligned}\tag{6.4}$$

Se a alimentação for balanceada, tem-se  $V_\alpha = V_\beta$  e  $\theta_\alpha = \theta_\beta$ . Nós vamos analisar uma situação genérica em que  $V_\alpha \neq V_\beta$  e  $\theta_\alpha \neq \theta_\beta$ .

Considerando as identidades conhecidas da trigonometria, podemos escrever:

$$\begin{aligned}v_\alpha &= \frac{V_\alpha}{2} \left( e^{j(\omega t + \theta_\alpha)} + e^{-j(\omega t + \theta_\alpha)} \right) \\v_\beta &= \frac{V_\beta}{2j} \left( e^{j(\omega t + \theta_\beta)} - e^{-j(\omega t + \theta_\beta)} \right)\end{aligned}\tag{6.5}$$

Definindo-se:

$$\begin{aligned}\bar{v}_\alpha &= e^{j\theta_\alpha} \cdot v_\alpha & \therefore & \bar{v}_\alpha^* = e^{-j\theta_\alpha} \cdot v_\alpha \\ \bar{v}_\beta &= -je^{j\theta_\beta} \cdot v_\beta & \therefore & \bar{v}_\beta^* = je^{-j\theta_\beta} \cdot v_\beta\end{aligned}\tag{6.6}$$

obtém-se com (6.5) e (6.6)

$$\begin{aligned}v_\alpha &= \frac{1}{2} \left( \bar{v}_\alpha \cdot e^{j\omega t} + \bar{v}_\alpha^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \\v_\beta &= \frac{1}{2} \left( \bar{v}_\beta \cdot e^{j\omega t} + \bar{v}_\beta^* \cdot e^{-j\omega t} \right)\end{aligned}\tag{6.7}$$

As expressões (6.7) indicam que as tensões pulsativas foram decompostas em tensões rotativas, com módulos iguais e sentidos diferentes.

Considerando que:

$$\begin{aligned} v_{S_+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\alpha + jv_\beta) \\ v_{S_-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\alpha - jv_\beta) \end{aligned} \quad (6.8)$$

obtemos

$$v_{S_+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} \left( \bar{v}_\alpha \cdot e^{j\omega t} + \bar{v}_\alpha^* \cdot e^{-j\omega t} \right) + j \frac{1}{2} \left( \bar{v}_\beta \cdot e^{j\omega t} + \bar{v}_\beta^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \right) \quad (6.9)$$

Assim:

$$v_{S_+} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\bar{v}_\alpha + j\bar{v}_\beta}{\sqrt{2}} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left( \frac{\bar{v}_\alpha^* + j\bar{v}_\beta^*}{\sqrt{2}} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right) \quad (6.10)$$

Definindo-se:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{S_+} &= \frac{\bar{v}_\alpha + j\bar{v}_\beta}{\sqrt{2}} \\ \bar{v}_{S_-} &= \frac{\bar{v}_\alpha - j\bar{v}_\beta}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Assim:

$$\begin{aligned} v_{S_+} &= \frac{1}{2} \left( \bar{v}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{v}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \\ v_{S_-} &= \frac{1}{2} \left( \bar{v}_{S_+}^* \cdot e^{-j\omega t} + \bar{v}_{S_-} \cdot e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Convém ressaltar que  $\bar{v}_\alpha$  e  $\bar{v}_\beta$  são fasores. Portanto  $\bar{v}_{S_+}$  e  $\bar{v}_{S_-}$  também são fasores.

As expressões (6.11) podem ser representadas do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{S_+} \\ \bar{v}_{S_-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_\alpha \\ \bar{v}_\beta \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

que é a transformação componentes simétricas tradicionais.

As grandezas  $v_{S_+}$  e  $v_{S_-}$  são temporais e portanto não são fasores.

Por analogia com a expressão (6.12) podemos estabelecer as expressões estatóricas e rotóricas.

$$\begin{aligned} \dot{i}_{S_+} &= \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \\ \dot{i}_{S_-} &= \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{S_+}^* \cdot e^{-j\omega t} + \bar{i}_{S_-} \cdot e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_{R_+} &= \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{R_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{R_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \\ \dot{i}_{R_-} &= \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{R_+}^* \cdot e^{-j\omega t} + \bar{i}_{R_-} \cdot e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Levando-se as expressões (6.12), (6.14) e (6.15) na expressão (6.1), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \left( \bar{v}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{v}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) = (R_S + pL_S) \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) + pm_{SR} \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{R_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{R_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \quad (6.16)$$

e

$$0 = m_{SR} \left( p - jn\dot{\theta} \right) \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) + \left( R_R + L_R \left( p - jn\dot{\theta} \right) \right) \frac{1}{2} \left( \bar{i}_{R_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{R_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \quad (6.17)$$

Se a máquina gira com velocidade constante, o seu modelo é linear, valendo portanto a superposição. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} &= (R_S + pL_S) \bar{i}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + pm_{SR} \bar{i}_{R_+} \cdot e^{j\omega t} \\ 0 &= m_{SR} \left( p - jn\dot{\theta} \right) \bar{i}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \left( R_R + L_R \left( p - jn\dot{\theta} \right) \right) \bar{i}_{R_+} \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}\quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} &= (R_S + pL_S) \bar{i}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} + pm_{SR} \bar{i}_{R_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \\ 0 &= m_{SR} \left( p - jn\dot{\theta} \right) \bar{i}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} + \left( R_R + L_R \left( p - jn\dot{\theta} \right) \right) \bar{i}_{R_-}^* \cdot e^{-j\omega t}\end{aligned}\quad (6.19)$$

Tomando-se as derivadas

$$pe^{j\omega t} = j\omega \cdot e^{j\omega t} \quad (6.20)$$

e cancelando-se as exponenciais, obtém-se

$$\begin{aligned}\bar{v}_{S_+} &= (R_S + j\omega L_S) \bar{i}_{S_+} + j\omega m_{SR} \bar{i}_{R_+} \\ 0 &= m_{SR} \left( j\omega - jn\dot{\theta} \right) \bar{i}_{S_+} + \left( R_R + L_R \left( j\omega - jn\dot{\theta} \right) \right) \bar{i}_{R_+}\end{aligned}\quad (6.21)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{S_-}^* &= (R_S + j\omega L_S) \bar{i}_{S_-}^* + j\omega m_{SR} \bar{i}_{R_-}^* \\ 0 &= m_{SR} \left( jn\dot{\theta} + j\omega \right) \bar{i}_{S_-}^* + \left( R_R + L_R \left( jn\dot{\theta} + j\omega \right) \right) \bar{i}_{R_-}^*\end{aligned}\quad (6.22)$$

como

$$n\dot{\theta} = \omega_m \quad (6.23)$$

$$\omega - \omega_m = \omega_R = s\omega \quad (6.24)$$

$$\omega + \omega_m = (2-s)\omega \quad (6.25)$$

Substituindo em (6.21) e (6.22), obtém-se:

$$\bar{v}_{S_+} = (\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \bar{i}_{S_+} + j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{R_+} \quad (6.26)$$

$$0 = js\omega_s m_{SR} \bar{i}_{S_+} + (\mathbf{R}_R + js\omega_s \mathbb{L}_R) \bar{i}_{R_+}$$

$$\bar{v}_{S_-} = (\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \bar{i}_{S_-} + j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{R_-} \quad (6.27)$$

$$0 = jm_{SR} (2-s)\omega_s \bar{i}_{S_-} + (\mathbf{R}_R + j\mathbb{L}_R (2-s)\omega_s) \bar{i}_{R_-}$$

Dividindo-se a segunda equação por “s” e a quarta por “2 – s”, obtém-se:

$$\bar{v}_{S_+} = (\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \bar{i}_{S_+} + j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{R_+} \quad (6.28)$$

$$0 = j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{S_+} + \left( \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) \bar{i}_{R_+}$$

$$\bar{v}_{S_-}^* = (\mathbf{R}_S - j\omega_s \mathbb{L}_S) \bar{i}_{S_-}^* - j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{R_-}^* \quad (6.29)$$

$$0 = -m_{SR} \omega_s \bar{i}_{S_-}^* + \left( \frac{\mathbf{R}_R}{(2-s)} - j\mathbb{L}_R \omega_s \right) \bar{i}_{R_-}^*$$

Estes dois conjuntos de equações levam ao circuito equivalente para o motor, representado na Fig. 6.1.

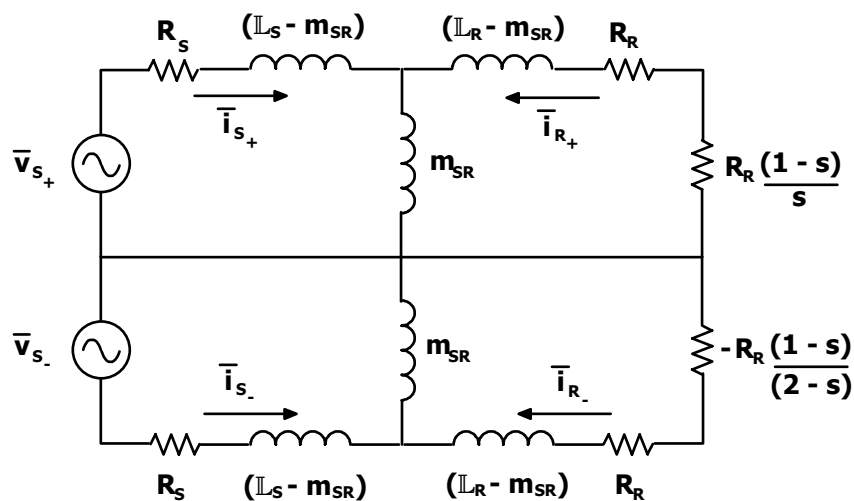


Fig. 6.1 – Circuito equivalente para o motor de indução com operação desbalanceada.

Este circuito vale para operação desbalanceada, desde que as tensões sejam senoidais e a velocidade constante.

Para operação balanceada, tem-se  $\bar{v}_{s-} = 0$ ; assim o modelo e o circuito eqüivalente são representados pela expressão (6.32) e pela Fig. 6.2.

$$\begin{aligned}\bar{v}_{s+} &= (R_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \bar{i}_{s+} + j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{R+} \\ 0 &= j\omega_s m_{SR} \bar{i}_{s+} + \left( \frac{R_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) \bar{i}_{R+}\end{aligned}\quad (6.30)$$

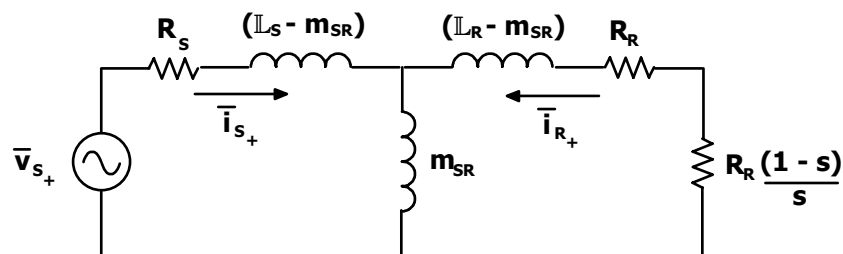


Fig. 6.2 – Circuito eqüivalente para o motor de indução com operação balanceada.

O circuito eqüivalente pode ainda ser representado segundo a Fig. 6.3.

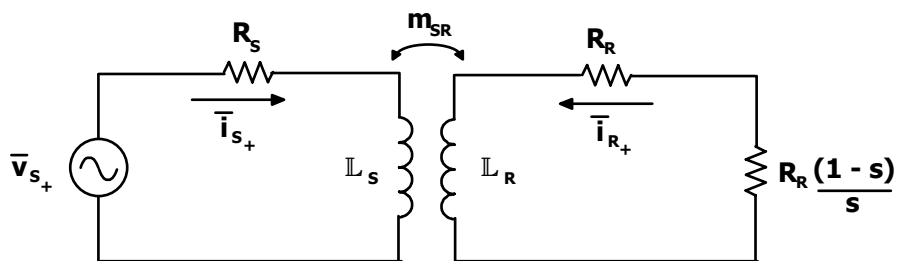


Fig. 6.3 – Representação alternativa para o circuito eqüivalente do motor de indução com operação balanceada.

## TRANSFORMAÇÃO PRIMÁRIO-SECUNDÁRIO

Consideremos o circuito representado na Fig. 6.4.

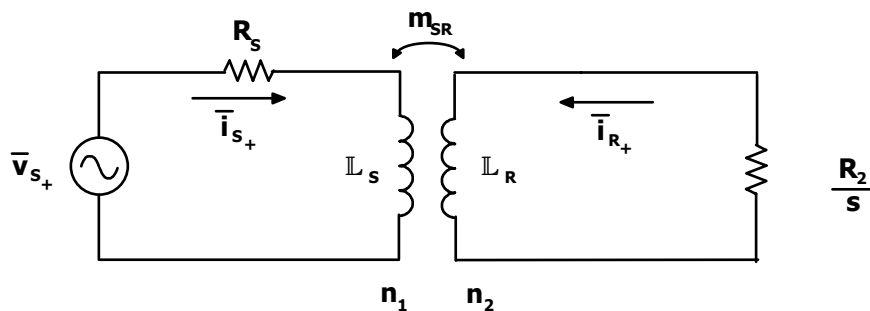


Fig. 6.4 –Circuito eqüivalente do motor de indução com operação balanceada.

Seja

$$a = \frac{n_1}{n_2} \tag{6.31}$$

Assim

$$\frac{\bar{V}_{S_+}}{\bar{V}_{R_+}} = a \tag{6.32}$$

e

$$\frac{\bar{I}_{R_+}}{\bar{I}_{S_+}} = a \tag{6.33}$$

Seja

$$v_{R_+}' = a v_{R_+} \Rightarrow \text{tensão rotórica referida ao estator e} \tag{6.34}$$

$$i_{R_+}' = \frac{i_{R_+}}{a} \Rightarrow \text{corrente rotórica referida ao estator.} \tag{6.35}$$

Definimos a transformação:

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_{S_+} \\ \bar{i}_{R_+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{S_+}' \\ \bar{i}_{R_+}' \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{S_+}' \\ \dot{i}_{R_+}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_+}' \\ \dot{i}_{R_+}' \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Do mesmo modo:

$$\begin{bmatrix} v_{S_+}' \\ v_{R_+}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_+}' \\ v_{R_+}' \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$$\begin{bmatrix} v_{S_+}' \\ v_{R_+}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_+}' \\ v_{R_+}' \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Seja

$$\mathbf{PS}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

e

$$\mathbf{PS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Tomemos as equações da máquina simétrica:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{S_+} \\ \bar{v}_{R_+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S & j\omega_S m_{SR} \\ j\omega_S m_{SR} & \frac{R_R}{s} + j\omega_S \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{S_+} \\ \bar{i}_{R_+} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

que podem ainda ser escritas:

$$\bar{\mathbf{v}}_+ = \mathbf{Z} \bar{\mathbf{i}}_+ \quad (6.43)$$

Assim

$$\mathbf{PS} \cdot \bar{\mathbf{v}}_+' = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{PS}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{i}}_+' \quad (6.44)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_+' = \mathbf{PS}^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{PS}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{i}}_+' \quad (6.45)$$

Seja

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{PS}^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{PS}^{-1} \quad (6.46)$$

Assim

$$\bar{\mathbf{v}}_+' = \mathbf{Z}' \cdot \bar{\mathbf{i}}_+' \quad (6.47)$$

Calculemos a nova matriz impedância  $\mathbf{Z}'$ . Assim:

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S + j\omega_S \mathbb{L}_S & j\omega_S m_{SR} \\ j\omega_S m_{SR} & \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_S \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Assim:

$$\mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S + j\omega_S \mathbb{L}_S & j\omega_S a m_{SR} \\ j\omega_S a m_{SR} & \frac{a^2 \mathbf{R}_R}{s} + j\omega_S a^2 \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Como  $\bar{\mathbf{v}}_{S_+}' = \bar{\mathbf{v}}_{S_+}$  e  $\bar{\mathbf{i}}_{S_+}' = \bar{\mathbf{i}}_{S_+}$  tem-se para o motor de indução o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_{S_+}' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S + j\omega_S \mathbb{L}_S & j\omega_S a m_{SR} \\ j\omega_S a m_{SR} & \frac{a^2 \mathbf{R}_R}{s} + j\omega_S a^2 \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}}_{S_+}' \\ \bar{\mathbf{i}}_{R_+}' \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

O novo circuito equivalente associado ao novo modelo está representado na Fig. 6.5.

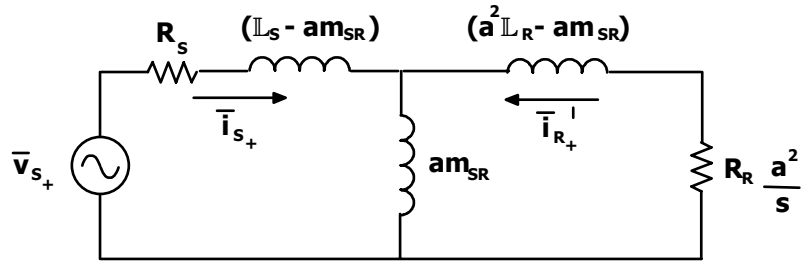


Fig. 6.5 – Circuito eqüivalente para o motor de indução.

Vamos definir os seguintes parâmetros:

$m_1 = a m_{SR} \Rightarrow$  indutância de magnetização.

$l_1 = L_s - a m_{SR} \Rightarrow$  indutância de dispersão do estator.

$l_2 = a^2 L_R - a m_{SR} \Rightarrow$  indutância de dispersão do rotor referida ao estator. (6.51)

$\frac{r_R}{s} = \frac{a^2 R_R}{s} \Rightarrow$  resistência do rotor referida ao estator.

Desse modo o modelo para o motor de indução passa a ser:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{s+} &= (R_s + jX_1) \bar{i}_{s+} + jXm_1 (\bar{i}_{s+} + \bar{i}_{R+}) \\ 0 &= jXm_1 (\bar{i}_{s+} + \bar{i}_{R+}) + \left( \frac{r_R}{s} + jX_2 \right) \bar{i}_{R+} \end{aligned} \tag{6.52}$$

O circuito eqüivalente será o representado na Fig. 6.6.

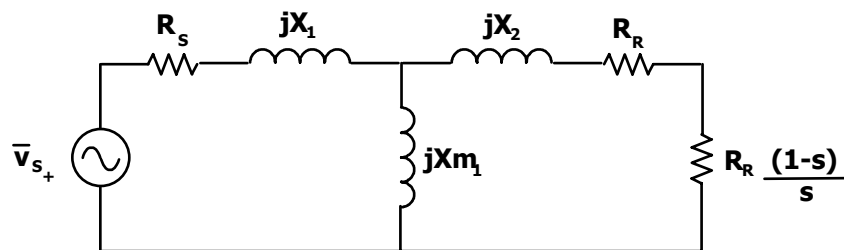


Fig. 6.6 – Circuito eqüivalente para o motor de indução.

Este é o circuito eqüivalente clássico do motor de indução para alimentação senoidal balanceada em regime permanente. Na teoria clássica ele é normalmente estabelecido intuitivamente.

O maior interesse deste circuito deve-se ao fato que os seus parâmetros podem ser medidos com facilidade e com relativa precisão, através dos ensaios de rotor travado e a vazio.

O circuito equivalente para alimentação desbalanceada será o representado pela Fig. 6.7.

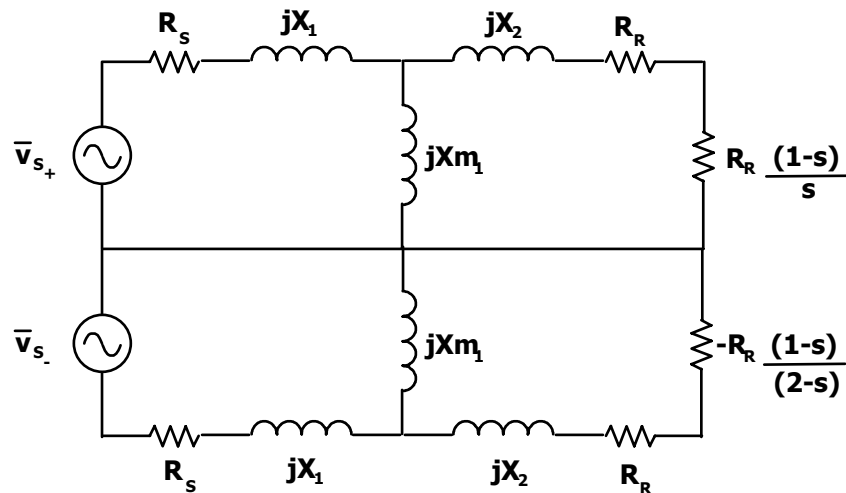


Fig. 6.7 – Circuito equivalente para o motor de indução.

Estes circuitos têm grande importância prática.

## CÁLCULO DO TORQUE MÉDIO DA MÁQUINA DE INDUÇÃO EM REGIME PERMANENTE

Vamos inicialmente estabelecer a expressão geral do torque para regime permanente.

Foi estabelecido que:

$$T = 2 \cdot n \cdot m_{SR} \operatorname{Im}(\bar{i}_{S_+} \cdot \bar{i}_{R_-}) \quad (6.53)$$

Levando-se as expressões (6.14) e (6.15) em (6.53), obtém-se

$$T = 2 \cdot n \cdot m_{SR} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{4} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot e^{j\omega t} + \bar{i}_{S_-}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \cdot \left( \bar{i}_{R_+}^* \cdot e^{-j\omega t} + \bar{i}_{R_-} \cdot e^{j\omega t} \right) \right) \quad (6.54)$$

Portanto

$$T = \frac{n \cdot m_{SR}}{2} \operatorname{Im} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot \bar{i}_{R_+}^* + \bar{i}_{S_-} \cdot \bar{i}_{R_+}^* \cdot e^{-j2\omega t} + \bar{i}_{S_+} \cdot \bar{i}_{R_-} \cdot e^{j2\omega t} + \bar{i}_{S_-} \cdot \bar{i}_{R_-}^* \right) \quad (6.55)$$

Os termos onde aparecem  $e^{j2\omega t}$  e  $e^{-j2\omega t}$  possuem torque médio nulo e podem então ser abandonados. Assim:

$$T = \frac{n \cdot m_{SR}}{2} \operatorname{Im} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot \bar{i}_{R_+}^* + \bar{i}_{S_-} \cdot \bar{i}_{R_-}^* \right) \quad (6.56)$$

Podemos definir:

$$T_+ = \frac{n \cdot m_{SR}}{2} \operatorname{Im} \left( \bar{i}_{S_+} \cdot \bar{i}_{R_+}^* \right) \quad (6.57)$$

e

$$T_- = \frac{n \cdot m_{SR}}{2} \operatorname{Im} \left( \bar{i}_{S_-} \cdot \bar{i}_{R_-}^* \right) \quad (6.58)$$

Assim:

$$T = T_+ + T_- \quad (6.59)$$

Para se obter as expressões do torque é necessário que se conheça as expressões das correntes. Foi visto que:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{S_+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + j\omega_s L_S & j\omega_s m_{SR} \\ j\omega_s m_{SR} & \frac{R_R}{s} + j\omega_s L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{S_+} \\ \bar{i}_{R_+} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

A inversa da matriz  $\mathbf{Z}$  é dada por:

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{(\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \left( \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) + \omega_s^2 \mathbf{m}_{SR}^2} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R & -j\omega_s \mathbf{m}_{SR} \\ -j\omega_s \mathbf{m}_{SR} & \mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Como:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}}_{S+} \\ \bar{\mathbf{i}}_{R+} \end{bmatrix} = \frac{1}{(\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \left( \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) + \omega_s^2 \mathbf{m}_{SR}^2} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R & -j\omega_s \mathbf{m}_{SR} \\ -j\omega_s \mathbf{m}_{SR} & \mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_{S+} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

obtem-se:

$$\bar{\mathbf{i}}_{S+} = \frac{\left( \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) \bar{\mathbf{v}}_{S+}}{(\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \left( \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) + \omega_s^2 \mathbf{m}_{SR}^2} \quad (6.63)$$

$$\bar{\mathbf{i}}_{R+} = \frac{-j\omega_s \mathbf{m}_{SR} \bar{\mathbf{v}}_{S+}}{(\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \left( \frac{\mathbf{R}_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) + \omega_s^2 \mathbf{m}_{SR}^2} \quad (6.64)$$

De um modo semelhante podemos obter:

$$\bar{\mathbf{i}}_{S-} = \frac{\left( \frac{\mathbf{R}_R}{2-s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) \bar{\mathbf{v}}_{S-}}{(\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \left( \frac{\mathbf{R}_R}{2-s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) + \omega_s^2 \mathbf{m}_{SR}^2} \quad (6.65)$$

$$\bar{\mathbf{i}}_{R-} = \frac{-j\omega_s \mathbf{m}_{SR} \bar{\mathbf{v}}_{S-}}{(\mathbf{R}_S + j\omega_s \mathbb{L}_S) \left( \frac{\mathbf{R}_R}{2-s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) + \omega_s^2 \mathbf{m}_{SR}^2} \quad (6.66)$$

Podemos ainda representar as correntes do seguinte modo:

$$\bar{i}_{S_+} = \frac{\left( \frac{R_R}{s} + j\omega_s \mathbb{L}_R \right) \bar{v}_{S_+}}{\frac{R_S R_R}{s} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 + j \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{s} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)} \quad (6.67)$$

$$\bar{i}_{R_+} = \frac{-j\omega_s m_{SR} \bar{v}_{S_+}}{\frac{R_S R_R}{s} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 + j \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{s} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)} \quad (6.68)$$

Desse modo, tem-se:

$$\bar{i}_{R_+}^* = \frac{j\omega_s m_{SR} \bar{v}_{S_+}^*}{\frac{R_S R_R}{s} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 - j \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{s} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)} \quad (6.69)$$

Assim:

$$\bar{i}_{S_+} \cdot \bar{i}_{R_+}^* = \frac{\left( -\omega_s^2 m_{SR} \mathbb{L}_R + j \frac{\omega_s m_{SR} R_R}{s} \right) \bar{v}_{S_+} \cdot \bar{v}_{S_+}^*}{\left( \frac{R_S R_R}{s} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{s} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)^2} \quad (6.70)$$

Pela teoria dos números complexos, sabemos que:

$$\bar{v}_{S_+} \cdot \bar{v}_{S_+}^* = \left| \bar{v}_{S_+} \right|^2 \quad (6.71)$$

Consequentemente as expressões do torque serão:

$$T_+ = \frac{\frac{1}{2} \frac{n\omega_s m_{SR}^2 R_R}{s} \left| \bar{v}_{S_+} \right|^2}{\left( \frac{R_S R_R}{s} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{s} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)^2} \quad (6.72)$$

$$T = \frac{-\frac{1}{2} \frac{n\omega_s m_{SR}^2 R_R}{(2-s)} \left| \bar{v}_{S_+} \right|^2}{\left( \frac{R_S R_R}{(2-s)} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{(2-s)} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)^2} \quad (6.73)$$

Se a alimentação for balanceada tem-se:

$$\bar{v}_\alpha = j \bar{v}_\beta \quad (6.74)$$

$$\bar{v}_{S_-} = 0 \quad (6.75)$$

$$\bar{v}_{S_+} = \frac{2jv_\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left| \bar{v}_{S_+} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} \left| \bar{v}_\beta \right| \quad (6.76)$$

$$\left| \bar{v}_\beta \right| = v_\beta = v_\alpha = v_{\alpha\beta} \quad (6.77)$$

$$\left| \bar{v}_{S_+} \right|^2 = 2v_{\alpha\beta}^2 \quad (6.78)$$

mas

$$v_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{SP} \quad (6.79)$$

onde  $V_{SP}$  é o pico da tensão de fase.

Assim:

$$\left| \bar{v}_{S_+} \right|^2 = 3V_{SP}^2 \quad (6.80)$$

mas

$$V_{SP} = \sqrt{2} \cdot v_S \quad (6.81)$$

Assim:

$$\left| \bar{v}_{S_+} \right|^2 = 6v_S^2 \quad (6.82)$$

onde  $v_S$  é o valor eficaz da tensão de alimentação.

Assim a expressão do torque para uma máquina balanceada será:

$$T_+ = \frac{3n\omega_s m_{SR}^2 \frac{R_R}{S} v_S^2}{\left( \frac{R_S R_R}{S} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{S} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)^2} \quad (6.83)$$

É mais freqüente encontrar-se a expressão (6.83) modificada, reescrita segundo a expressão (6.86).

$$T_+ = \frac{3 \frac{R_R}{S} \omega_s^2 m_{SR}^2 v_S^2}{\omega_{SN} \left( \left( \frac{R_S R_R}{S} - \omega_s^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 m_{SR}^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R}{S} + \omega_s \mathbb{L}_R R_S \right)^2 \right)} \quad (6.84)$$

onde  $\omega_{SN}$  é a velocidade síncrona.

É interessante expressar o torque em função das reatâncias de dispersão e magnetizante no lugar das reatâncias cíclicas.

Multiplicando-se o numerador e o denominador da expressão (6.84) por  $a^4$ , obtém-se a expressão (6.87).

$$T_+ = \frac{3 \left( a^2 \frac{R_R}{S} \right) \omega_s^2 a^2 m_{SR}^2 v_S^2}{\omega_{SN} \left( \left( \frac{R_S a^2 R_R}{S} - \omega_s^2 a^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 a^2 m_{SR}^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R a^2}{S} + \omega_s a^2 \mathbb{L}_R R_S \right)^2 \right)} \quad (6.85)$$

Seja:

$$A = \frac{R_S a^2 R_R}{s} - \omega_s^2 a^2 \mathbb{L}_R \mathbb{L}_S + \omega_s^2 a^2 m_{SR}^2 \quad (6.86)$$

$$B = \frac{\omega_s \mathbb{L}_S R_R a^2}{s} + \omega_s a^2 \mathbb{L}_R R_S \quad (6.87)$$

Assim:

$$A = \frac{R_S a^2 R_R}{s} - a^2 X_R X_S + a^2 X_M^2 \quad (6.88)$$

onde:

$$X_M = \omega_s m_{SR} \Rightarrow \text{Reatância mútua cíclica.}$$

$$X_S = \omega_s \mathbb{L}_S \Rightarrow \text{Reatância cíclica do estator.}$$

$$X_R = \omega_s \mathbb{L}_R \Rightarrow \text{Reatância cíclica do rotor.}$$

A expressão (6.88) pode ser reescrita segundo a expressão (6.91).

$$A = \frac{R_S a^2 R_R}{s} - a^2 X_R X_S + a^2 X_M^2 - a^3 X_M X_R + a^3 X_M X_S - a X_S X_M + a X_S X_M + a^2 X_M^2 - a^2 X_M^2 \quad (6.89)$$

Assim:

$$A = \frac{R_S a^2 R_R}{s} - a X_M (a^2 X_R - a X_M) - a X_M (X_S - a X_M) - (X_S - a X_M) (a^2 X_R - a X_M) \quad (6.90)$$

mas:

$$\frac{R_R'}{s} = \frac{a^2 R_R}{s} \quad (6.91)$$

$$X_m = a X_M \Rightarrow \text{Reatância magnetizante.}$$

$$X_1 = X_S - a X_M \Rightarrow \text{Reatância de dispersão do estator.}$$

$$X_2' = a^2 X_R - a X_M \Rightarrow \text{Reatância de dispersão do rotor referida ao rotor.}$$

$$A = \frac{R_S a^2 R_R}{s} - X_m X_2' - X_1 X_m - X_1 X_2' \quad (6.92)$$

Vamos em seguida manipular a expressão (6.87).

$$B = a^2 \left( \frac{X_S R_R}{s} + X_R R_S \right) \quad (6.93)$$

$$B = \frac{a^2 X_S R_R}{s} + a^2 X_R R_S - \frac{a^3 X_M R_R}{s} + \frac{a^3 X_M R_R}{s} + R_S a X_M - R_S a X_M \quad (6.94)$$

$$B = \frac{R_R'}{s} (X_S - a X_M) + a X_M \frac{R_R'}{s} + R_S (a X_M + (a^2 X_R - a X_M)) \quad (6.95)$$

$$B = \frac{R_R'}{s} X_1 + X_m \frac{R_R'}{s} + R_S (X_m + X_2') \quad (6.96)$$

Levando-se as expressões (6.92) e (6.96) na expressão (6.85), obtém-se a expressão (6.100).

$$T_+ = \frac{3 \frac{R_R'}{s} X_m^2 V_S^2}{\omega_{SN} \left( \left( \frac{R_S a^2 R_R}{s} - X_m X_2' - X_1 X_m - X_1 X_2' \right)^2 + \left( \frac{R_R'}{s} X_1 + X_m \frac{R_R'}{s} + R_S (X_m + X_2') \right)^2 \right)} \quad (6.97)$$

A expressão (6.97) é mais difundida que a expressão (6.83). É obtida normalmente pela análise do circuito eqüivalente da máquina. É sem dúvida uma das expressões mais importantes em engenharia elétrica.

A representação gráfica da expressão (6.97) encontra-se na Fig. 6.8. O torque é representado em função do escorregamento s.

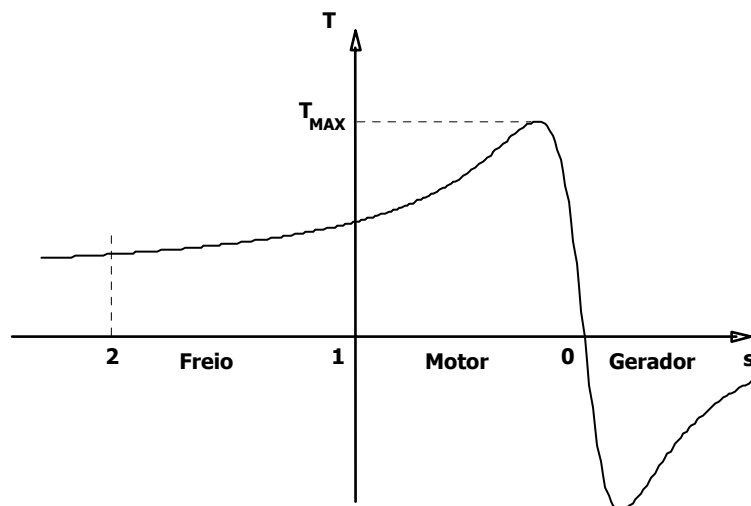


Fig. 6.8 – Torque da máquina de indução em função do escorregamento.

## MODELO PARA O REGIME PERMANENTE A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE PARK

Nos itens anteriores, foram obtidos modelos para o motor de indução em regime permanente, a partir do modelo genérico estabelecido para componentes simétricas instantâneas.

Neste item será estabelecido o modelo para estudar em regime, a partir do modelo genérico estabelecido pela transformação de PARK.

Seja o modelo de PARK, obtido no capítulo IV, representado pela expressão (6.101).

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & 0 & pm_{SR} & 0 \\ 0 & R_S + pL_S & 0 & pm_{SR} \\ pm_{SR} & m_{SR} \dot{\theta} n & R_R + pL_R & L_R n \dot{\theta} \\ -m_{SR} \dot{\theta} n & pm_{SR} & -L_R n \dot{\theta} & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

Em regime permanente senoidal as tensões e correntes instantâneas serão substituídas por fasores, com módulos iguais aos valores eficazes. Fazendo  $p = j\omega$  obtém-se a expressão .

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \\ v_{R_d} \\ v_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + j\omega L_S & 0 & j\omega m_{SR} & 0 \\ 0 & R_S + j\omega L_S & 0 & j\omega m_{SR} \\ \hline j\omega m_{SR} & m_{SR} \dot{\theta} n & R_R + j\omega L_R & L_R n \dot{\theta} \\ -m_{SR} \dot{\theta} n & j\omega m_{SR} & -L_R n \dot{\theta} & R_R + j\omega L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \\ i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

A expressão (6.99) pode ser representada compactamente pela expressão (6.103).

$$\mathbf{v} = \mathbf{Z}(\dot{\theta}) \mathbf{i} \quad (6.100)$$

Para se obter as correntes do motor faz-se:

$$\mathbf{i} = \mathbf{Z}(\dot{\theta})^{-1} \mathbf{v} \quad (6.101)$$

Com o auxílio de um computador, pode-se calcular as correntes em função da velocidade do rotor  $\dot{\theta}$ , conhecendo-se as tensões de alimentação, os parâmetros e a frequência de alimentação.

Podemos afirmar que os modelos obtidos a partir das transformações complexas são mais adequados para o estudo analítico, por serem mais simples. Além disso, levam ao estabelecimento de circuitos equivalentes, que permitem a interpretação física do comportamento do motor.

Para a obtenção da expressão do torque, será adotado o procedimento descrito a seguir:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_S & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_R \end{bmatrix} \quad (6.102)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} & 0 \\ 0 & \mathbb{L}_S & 0 & m_{SR} \\ \hline m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R & 0 \\ 0 & m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R \\ -m_{SR} & 0 & -\mathbb{L}_R & 0 \end{bmatrix} \quad (6.104)$$

Assim:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i} + j\omega\mathbf{L}\mathbf{i} + n\dot{\theta}\mathbf{G}\mathbf{i} \quad (6.105)$$

Pré-multiplicando todos os termos da expressão (6.105) por  $\mathbf{i}_t^*$  obtém-se:

$$\mathbf{i}_t^* \mathbf{v} = \mathbf{i}_t^* \mathbf{R}\mathbf{i} + j\omega \mathbf{i}_t^* \mathbf{L}\mathbf{i} + n\dot{\theta} \mathbf{i}_t^* \mathbf{G}\mathbf{i} \quad (6.106)$$

Tomando-se a parte real de cada termo, obtém-se a expressão (6.110).

$$\text{Re}(\mathbf{i}_t^* \mathbf{v}) = \text{Re}(\mathbf{i}_t^* \mathbf{R}\mathbf{i}) + \text{Re}(j\omega \mathbf{i}_t^* \mathbf{L}\mathbf{i}) + \text{Re}(n\dot{\theta} \mathbf{i}_t^* \mathbf{G}\mathbf{i}) \quad (6.107)$$

onde:

$\text{Re}(\mathbf{i}_t^* \mathbf{v}) \Rightarrow$  potência entregue ao motor.

$\text{Re}(\mathbf{i}_t^* \mathbf{R}\mathbf{i}) \Rightarrow$  potência perdida nas resistências dos enrolamentos.

$\text{Re}(j\omega \mathbf{i}_t^* \mathbf{L}\mathbf{i}) \Rightarrow$  potência puramente reativa, necessária para produzir fluxo no motor.

$(n\dot{\theta} \mathbf{i}_t^* \mathbf{G}\mathbf{i}) \Rightarrow$  potência mecânica produzida pelo motor.

$$P_m = n\dot{\theta} \text{Re}(\mathbf{i}_t^* \mathbf{G}\mathbf{i}) \quad (6.108)$$

$$T = \frac{P_m}{\dot{\theta}} \quad (6.109)$$

Assim:

$$T = n \operatorname{Re}(\mathbf{i}_t^* \mathbf{G} \mathbf{i}) \quad (6.110)$$

Assim:

$$T = n \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d}^* & \dot{i}_{S_q}^* & \dot{i}_{R_d}^* & \dot{i}_{R_q}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{SR} & 0 & \mathbb{L}_R \\ -m_{SR} & 0 & -\mathbb{L}_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_d} \\ \dot{i}_{S_q} \\ \dot{i}_{R_d} \\ \dot{i}_{R_q} \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

Fazendo-se o produto matricial e ignorando-se o sentido do torque, obtém-se a expressão .

$$T = nm_{SR} \operatorname{Re}(\dot{i}_{S_q} \dot{i}_{R_d}^* - \dot{i}_{S_d} \dot{i}_{R_d}^*) \quad (6.112)$$

Com as correntes obtidas na expressão (6.99) entra-se na expressão (6.112) e obtém-se o torque médio desenvolvido pelo motor em função da velocidade.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

---

1) Seja um motor de indução com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 X_1 = X_2 &= 4\Omega \quad (\text{reatâncias de dispersão}) \\
 R_S &= 2\Omega \\
 R_R &= 3\Omega \\
 X_{m1} &= 100\Omega \quad (\text{reatância magnética}) \\
 f &= 60\text{Hz} \\
 n &= 2 \quad (\text{pares de pólos}) \\
 v_s &= 220\text{V} \quad (\text{tensão eficaz de fase})
 \end{aligned}
 \tag{6.113}$$

Determinar as seguintes características:

- Torque médio em função do escorregamento;
  - Corrente eficaz de fase em função do escorregamento;
  - Determinar para qual escorregamento o torque é máximo;
  - Supondo escorregamento nominal igual a 0,03, determinar a velocidade, o torque e a potência nominais.
- 

2) Dos ensaios de um motor trifásico de indução foram obtidos os seguintes dados:

(a) Ensaio a vazio:  $v_f = 220\text{V}$   
 $i_f = 2,2\text{A}$

(b) Ensaio do rotor travado:  $v_f = 80\text{V}$       $\therefore$       $P_f = 130\text{W}$   
 $i_f = 5,2\text{A}$

(c) Medida de resistência do estator:  $R_s = 2,6\Omega$

Determinar:

- Indutância magnetizante;
- Indutância de dispersão;

- (c) Resistência do rotor ( $R_R$ );
- (d) Indutância cíclica do rotor referida ao estator ( $\mathbb{L}'_R$ );
- (e) Indutância cíclica do estator ( $\mathbb{L}_S$ ) e
- (f) Indutância mútua cíclica .
- 

- 3) Considere o modelo do exercício 1, alimentado por tensões desbalanceadas do seguinte tipo:

$$v_{S_1} = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s t) \quad (6.114)$$

$$v_{S_2} = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s t - 120^\circ) \quad (6.115)$$

$$v_{S_3} = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega_s t + 120^\circ) \quad (6.116)$$

Determinar as correntes  $i_{S_1}$ ,  $i_{S_2}$  e  $i_{S_3}$  e o torque do motor em função do escorregamento.

---

- 4) Considere o motor do exercício número 1, alimentado por tensões trifásicas balanceadas, geradas por um inversor, cuja forma está representada na Fig. 6.9 para uma fase.

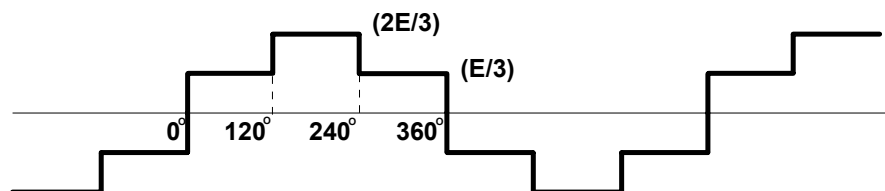


Fig. 6.9 – Forma de onda da tensão da fase 1.

Onde  $E = 400V$ ,  $f = 60Hz$

- (a) Empregando o princípio da superposição, determinar a característica torque-velocidade do motor.
  - (b) Obter a corrente de uma das fases em função do tempo.
-