

7.1 INTRODUÇÃO

Vamos considerar o caso de um motor de indução industrial, alimentado por tensões trifásicas balanceadas. Tal motor tem a característica torque-velocidade representada na Fig. 7.1.

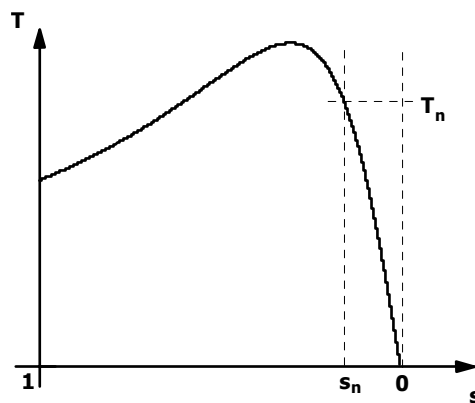


Fig. 7.1 – Característica de torque-velocidade de um motor de indução.

Normalmente o motor opera na região de baixos escorregamentos, onde $0 < s < s_n$ sendo s_n o escorregamento em que o motor produz o torque nominal. Durante o transitório de partida o escorregamento varia de 1 até um valor próximo de zero.

Dois transitórios mecânicos são de interesse prático:

- (a) partida do motor;
- (b) variação de carga na região normal de operação.

Como já foi estabelecido nos capítulos anteriores a solução completa das equações da máquina só pode ser obtida por simulação.

Neste capítulo nós procuraremos estabelecer métodos de análise dos transitórios citados, sem recorrer aos modelos completos do motor. Serão estabelecidos métodos simplificados, mas que produzam resultados satisfatórios do ponto de vista prático.

A simplificação decorre dos seguintes fatos:

- (a) a constante de tempo mecânica é muito maior que as constantes de tempo elétricas.
- (b) conseqüentemente, durante um transitório elétrico, a velocidade da máquina poderá ser considerada constante.
- (c) por outro lado, por serem os transitórios mecânicos muito lentos, as variáveis elétricas evoluirão através de regimes permanentes sucessivos.

As conseqüências dessas simplificações serão evidenciadas no desenvolvimento deste capítulo.

7.2 COMPORTAMENTO DINÂMICO NA REGIÃO DE BAIXOS ESCORREGAMENTOS

Foi estabelecida no capítulo VI a expressão do torque médio desenvolvido pelo motor, representada aqui pela expressão (7.1).

$$T = \frac{\frac{n}{2} \omega m_{SR}^2 \frac{R_R}{s} |v_{S+}|^2}{\left(\frac{R_S R_R}{s} - \omega^2 (\mathbb{L}_R \mathbb{L}_S - m_{SR}^2) \right)^2 + \omega^2 \left(\mathbb{L}_R R_S + \mathbb{L}_S \frac{R_R}{s} \right)^2} \quad (7.1)$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por s^2 , obtém-se a expressão (7.2).

$$T = \frac{\frac{n}{2} \omega m_{SR}^2 \frac{R_R}{s} |v_{S+}|^2 s^2}{\left(R_S R_R - s \omega^2 (\mathbb{L}_R \mathbb{L}_S - m_{SR}^2) \right)^2 + \omega^2 (\mathbb{L}_R R_S s + \mathbb{L}_S R_R)^2} \quad (7.2)$$

Na região em estudo, o escorregamento é muito baixo, assim $s \cong 0$. Portanto:

$$T = \frac{\frac{n}{2} \omega m_{SR}^2 R_R |v_{S+}|^2 s}{2 R_S^2 R_R^2 + \omega^2 \mathbb{L}_S^2 R_R^2} \quad (7.3)$$

$$T = \frac{n}{2} \frac{\omega m_{SR}^2 |v_{S+}|^2 s}{R_R (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)} \quad (7.4)$$

$$s = \frac{\omega - n\omega_m}{\omega} = 1 - \frac{n\omega_m}{\omega} \quad (7.5)$$

Assim:

$$T = \frac{n}{2} \frac{\omega m_{SR}^2 |v_{S+}|^2 \left(1 - \frac{n\omega_m}{\omega}\right)}{R_R (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)} \quad (7.6)$$

Podemos então concluir que na região de baixos escorregamentos o torque é função linear da velocidade. Desenvolvendo a expressão (7.6) encontramos a expressão (7.7).

$$T = \frac{n}{2} \frac{\omega m_{SR}^2 |v_{S+}|^2}{R_R (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)} - \frac{n^2}{2} \frac{m_{SR}^2 |v_{S+}|^2 \omega_m}{R_R (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)} \quad (7.7)$$

Seja:

$$De = \frac{n^2}{2} \frac{m_{SR}^2 |v_{S+}|^2}{R_R (R_S^2 + \omega^2 L_S^2)} \quad (7.8)$$

Portanto o torque pode ser representado pela expressão (7.9):

$$T = \frac{De \cdot \omega}{n} - De \cdot \omega_m \quad (7.9)$$

O transitório mecânico é descrito pela equação (7.10):

$$T = T_j + T_D + T_L \quad (7.10)$$

onde:

$T \Rightarrow$ torque do motor

$T_j \Rightarrow$ torque de inércia total

$T_D \Rightarrow$ torque de atrito total

$T_L \Rightarrow$ torque de carga

assim,

$$T_L + J \frac{d\omega_m}{dt} + (D + De)\omega_m = De \frac{\omega}{n} \quad (7.11)$$

Desse modo o comportamento do motor fica representado por uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Quando T_L e ω_m é constante, obtém-se

$$\omega_{m_0} = \frac{De}{(D + De)} \frac{\omega}{n} \quad (7.12)$$

que é a velocidade inicial do motor com torque de carga nulo.

Uma aplicação interessante do modelo estabelecido pelas expressões anteriores é o estudo do motor submetido a cargas impulsivas periódicas, encontradas em indústrias ligadas à metalurgia.

O torque impulsivo é aquele cuja duração é muito pequena em relação à constante de tempo mecânica do motor, incluindo o momento de inércia da máquina acionada por ele. Tal torque está representado na Fig. 7.2.

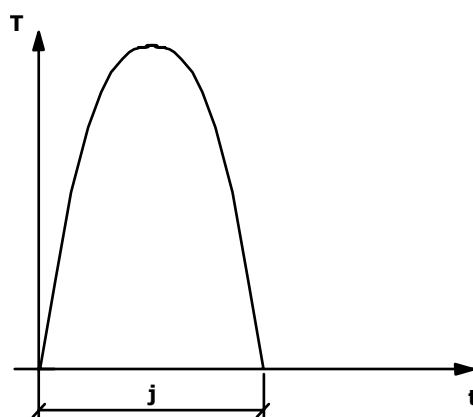


Fig. 7.2 – Representação do torque impulsivo.

A impulsão é definida pela expressão

$$I = \int_0^{\gamma} T(t) dt \quad (7.13)$$

A impulsão produz uma redução eqüivalente da quantidade de movimento do motor, definida pela expressão (7.14).

$$I = J\Delta\omega_m \quad (7.14)$$

assim:

$$\Delta\omega_m = \frac{I}{J} \quad (7.15)$$

Do ponto de vista teórico, a impulsão produz uma redução instantânea da velocidade, dada pela expressão (7.15). Assim, antes da impulsão a velocidade é dada pela expressão (7.16). Após a impulsão é representada pela expressão (7.18).

$$\omega_{m_{0-}} = \frac{De}{(D + De)} \frac{\omega}{n} \quad (7.16)$$

$$\omega_{m_{0+}} = \omega_{m_{0-}} - \Delta\omega_m \quad (7.17)$$

Assim:

$$\omega_{m_{0+}} = \frac{De}{(D + De)} \frac{\omega}{n} - \frac{I}{J} \quad (7.18)$$

Após a redução da velocidade provocada pela impulsão, a velocidade do motor começa a aumentar, obedecendo à equação (7.11) e com valor inicial $\omega_{m_{0+}}$, com torque de carga T_L nulo. Vamos rescrever a equação mecânica, que passa a ser representada pela expressão.

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + (D + De)\omega_m = De \frac{\omega}{n} \quad (7.19)$$

Vamos aplicar a transformada de Laplace na equação (7.19). Assim:

$$sJ\omega_m(s) - J\omega_{m_{0+}} + (D + De)\omega_m(s) = \frac{De}{n} \frac{\omega}{s} \quad (7.20)$$

$$\omega_m(s) = \frac{\frac{De \cdot \omega}{J \cdot n}}{s \left(s + \frac{D+De}{J} \right)} + \frac{\omega_{m0+}}{\left(s + \frac{D+De}{J} \right)} \quad (7.21)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos a expressão .

$$\omega_m(t) = \frac{De}{(D+De)} \frac{\omega}{n} \left(1 - e^{-\left(\frac{D+De}{J}\right)t} \right) + \omega_{m0+} e^{-\left(\frac{D+De}{J}\right)t} \quad (7.22)$$

Assim:

$$\omega_m(t) = \frac{De}{(D+De)} \frac{\omega}{n} - \frac{I}{J} e^{-\left(\frac{D+De}{J}\right)t} \quad (7.23)$$

A evolução da velocidade em função do tempo está representada na Fig. 7.3.

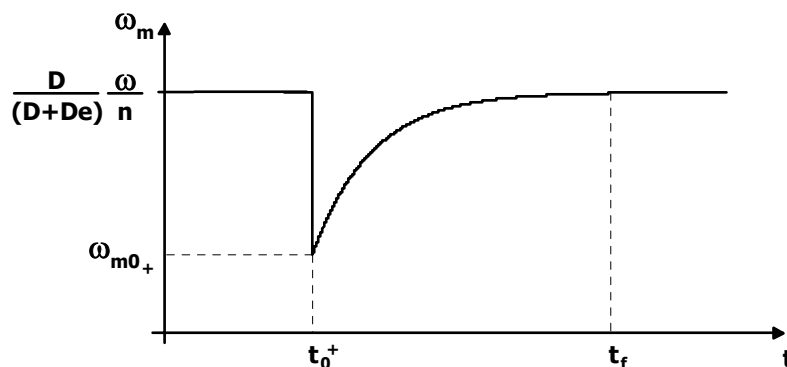


Fig. 7.3 – Evolução da velocidade após um torque impulsivo.

O motor readquire a sua velocidade quando $t = t_f$

$$t_f \cong 5\tau_m = \frac{5J}{D+De} \quad (7.24)$$

A frequência dos impactos é definida pela expressão (7.25).

$$f_{\text{máx}} = \frac{1}{t_f} = \frac{D+De}{5J} \quad (7.25)$$

A quantidade máxima de impactos aumenta na medida em que a inércia do conjunto diminui.

Vamos a seguir determinar a forma da corrente estatórica da máquina durante o transitório imposto pela carga. A corrente em regime permanente é dada pela expressão (7.26), estabelecida no capítulo VI.

$$i_{S_+} = \frac{\left(\frac{R_R}{s} + j\omega L_R\right) v_{S_+}}{(R_S + j\omega L_S) \left(\frac{R_R}{s} + j\omega L_R\right) + \omega^2 m_{SR}^2} \quad (7.26)$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por s encontrarmos a expressão (7.27).

$$i_{S_+} = \frac{(R_R + j\omega L_R s) v_{S_+}}{(R_S + j\omega L_S)(R_R + j\omega L_R s) + s\omega^2 m_{SR}^2} \quad (7.27)$$

Como $s \cong 0$ encontramos:

$$i_{S_+} = \frac{(R_R + j\omega L_R s) v_{S_+}}{R_R (R_S + j\omega L_S)} \quad (7.28)$$

$$s = \frac{\omega - n\omega_m}{\omega} \quad (7.29)$$

Assim:

$$i_{S_+} = \frac{(R_R + jL_R(\omega - n\omega_m)) v_{S_+}}{R_R (R_S + j\omega L_S)} \quad (7.30)$$

Levando-se a expressão (7.23) na expressão (7.30) obtém-se a expressão .

$$i_{S_+} = \frac{\left(R_R + jL_R \left(\omega - \left(\frac{De}{(D+De)} \omega - \frac{n}{J} I e^{-\left(\frac{D+De}{J}\right)t} \right) \right) \right) v_{S_+}}{R_R (R_S + j\omega L_S)} \quad (7.31)$$

v_{S_+} e i_{S_+} estão relacionados com o valor de pico dos valores de fase pela mesma constante de proporcionalidade.

Assim o valor de pico da corrente de fase passa a ser representado pela expressão (7.32).

$$i_{S_p}(t) = \sqrt{\frac{\left(R_R^2 + \mathbb{L}_R^2 \left(\omega - \frac{De}{(D+De)} \omega + \frac{n}{J} I_e e^{-\left(\frac{D+De}{J}\right)t} \right)^2 \right)}{(R_S^2 + \omega^2 \mathbb{L}_S^2)}} \cdot \frac{V_{S_p}}{R_R} \quad (7.32)$$

Na Fig. 7.4 está representada a corrente do estator em função do tempo, cuja envoltória é representada pela expressão (7.32).

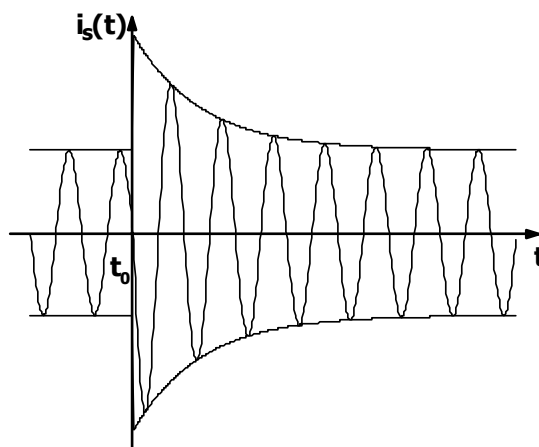


Fig. 7.4 – Comportamento da corrente de estator durante o torque impulsivo.

7.3 TRANSITÓRIO MECÂNICA DE PARTIDA

Seja a Fig. 7.5. Nela estão representados o torque produzido pelo motor e o torque oferecido pela carga, T_E e T_L respectivamente, em função da velocidade.

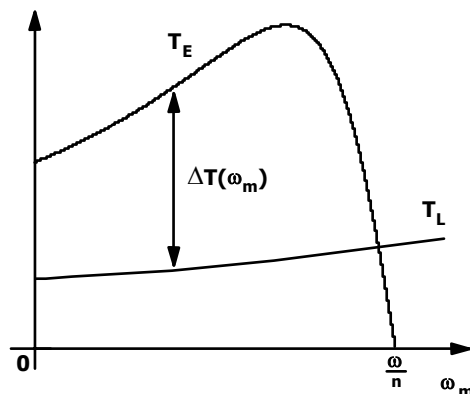


Fig. 7.5 – Característica de torque-velocidade de um motor de indução (T_E) e de uma carga (T_L).

$$\Delta T(\omega_m) = T_E - T_L \quad (7.33)$$

Ignorando o torque de atrito, o comportamento dinâmico obedece à expressão (7.34).

$$T_E - T_L = J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (7.34)$$

ou

$$\Delta T(\omega_m) = J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (7.35)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem não linear. Vamos estabelecer um método gráfico para resolvê-la.

Podemos escrever:

$$dt = \frac{J}{\Delta T(\omega_m)} d\omega_m \quad (7.36)$$

$$t = \int_0^{\omega_m} \frac{J}{\Delta T(\omega_m)} d\omega_m \quad (7.37)$$

A expressão (7.37) determina o tempo necessário para a velocidade evoluir de zero até ω_m .

A partir da Fig. 7.5 podemos obter a curva representada na Fig. 7.6.

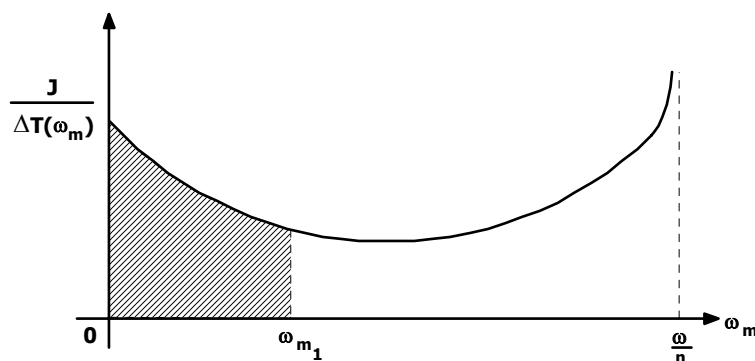


Fig. 7.6 – Curva para o cálculo do tempo de aceleração na partida do motor de indução.

Portanto a área hachurada na Fig. 7.6 representa o tempo necessário para a velocidade evoluir até ω_m . Assim, para cada valor de ω_m pode-se determinar graficamente o respectivo valor de t e obter a função $\omega_m(t)$, como está representada na Fig. 7.7.

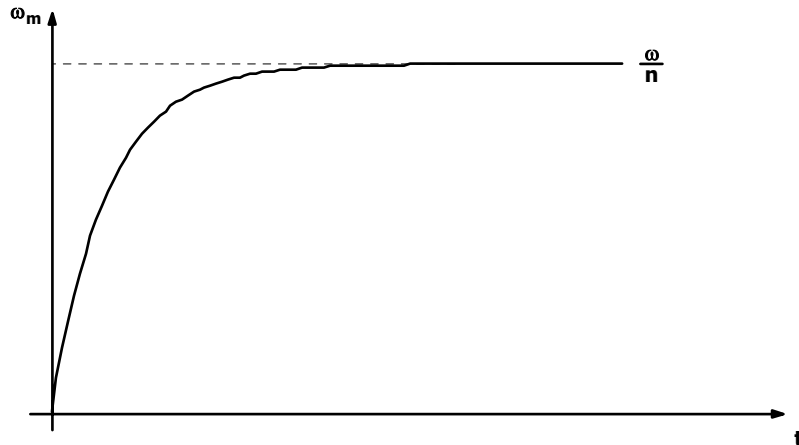


Fig. 7.7 – Velocidade angular em função do tempo.

Com o método descrito, apesar de sua simplicidade, obtém-se resultado satisfatórios e por isto é de grande interesse prático.

Conhecendo-se a função $\omega_m(t)$, pode-se estabelecer a função $i_s(t)$ com o emprego da expressão (7.32).

7.4 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Considere um motor de indução com os seguintes parâmetros:

$$J = 2,63 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ (inércia)}$$

$$D = 2,60 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \text{ (atrito)}$$

$$n = 4 \text{ (pares de pólos)}$$

$$f = 60\text{Hz} \text{ (frequência de alimentação)}$$

$$m_{SR} = 265 \text{ mH}$$

$$R_S = 2,0 \ \Omega$$

$$R_R = 3,0 \ \Omega$$

$$L_S = 275 \text{ mH}$$

$$L_R = 275 \text{ mH}$$

$$v_S = 220 \text{ V} \text{ (tensão de fase)}$$

O motor inicialmente funciona a vazio. Sofre a ação de um torque impulsivo cujo valor $I = 0,5 \text{ N.m}$. Determinar a resposta que o motor apresenta, em velocidade e corrente.