

## 8.1 TRANSITÓRIO ELÉTRICO DE PARTIDA

Vamos considerar o caso de um motor de indução com constante de tempo mecânica muito maior que as constantes de tempo elétricas. O motor encontra-se em repouso quando é subitamente alimentado por tensões senoidais balanceadas. Como conseqüência da diferença entre as constantes de tempo, o transitório das correntes se estingue antes que o motor comece a girar. Assim a análise será feita para velocidade nula.

Seja:

$$v_{s_1} = \sqrt{2}v_s \text{sen}(\omega t) \quad (8.1)$$

$$v_{s_2} = \sqrt{2}v_s \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \quad (8.2)$$

$$v_{s_3} = \sqrt{2}v_s \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \quad (8.3)$$

Assim:

$$v_{s_\alpha} = \sqrt{3}v_s \cos(\omega t) \quad (8.4)$$

$$v_{s_\beta} = \sqrt{3}v_s \text{sen}(\omega t) \quad (8.5)$$

Seja o modelo do motor em componentes simétricas instantâneas.

$$\begin{bmatrix} v_{s_\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + \mathbb{L}_S \left( p + j\dot{\Psi} \right) & m_{SR} \left( p + j\dot{\Psi} \right) \\ m_{SR} \left( p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta} \right) & R_R + \mathbb{L}_R \left( p + j\dot{\Psi} - j\dot{\theta} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s_\alpha} \\ i_{s_\beta} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Como o motor encontra-se em repouso  $\dot{\theta} = 0$ . Colocando-se o referencial no estator tem-se  $\dot{\Psi} = 0$ .

Assim:

$$\begin{bmatrix} v_{s_+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + pL_S & pm_{SR} \\ pm_{SR} & R_R + pL_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s_+} \\ i_{r_+} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

O modelo está representado pelo circuito a seguir.

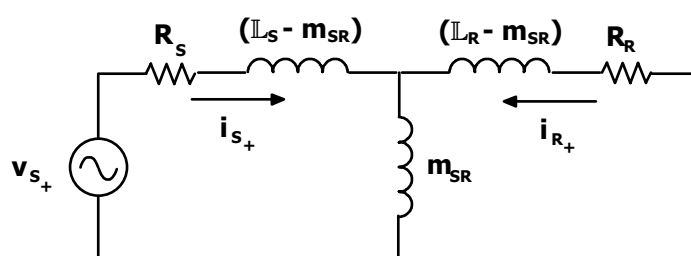


Fig. 8.1 – Circuito equivalente para o motor de indução com operação balanceada.

Todos os parâmetros estão referidos ao primário.

Seja:

$$\ell_S = L_S - m_{SR} \quad (\text{dispersão primária})$$

$$\ell_R = L_R - m_{SR} \quad (\text{dispersão secundária})$$

como  $\ell_S$  e  $\ell_R$  são muito menores que  $m_{SR}$ , a presença desta última indutância será ignorada. Assim o circuito adquire a configuração representada na Fig. 8.2.

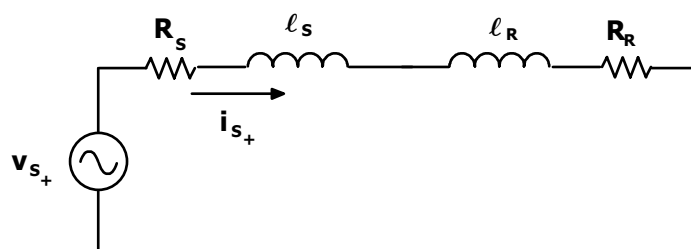


Fig. 8.2 – Circuito equivalente para o motor de indução simplificado.

O modelo então passa a ser:

$$v_{s_+} = (R_S + R_R) i_{s_+} + p(\ell_S + \ell_R) i_{s_+} \quad (8.8)$$

Seja:

$$R = R_S + R_R \quad (8.9)$$

$$\ell = \ell_S + \ell_R \quad (8.10)$$

Assim:

$$v_{S_+} = R i_{S_+} + p \ell i_{S_+} \quad (8.11)$$

Aplicando-se a transformação de Laplace, obtém-se:

$$i_{S_+}(s) = \frac{v_{S_+}(s)}{\ell} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{\ell}\right)} \quad (8.12)$$

$$v_{S_+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_{S_\alpha} + j v_{S_\beta}) \quad (8.13)$$

$$v_{S_+} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_S (\cos(\omega t) + j \text{sen}(\omega t)) \quad (8.14)$$

Assim:

$$v_{S_+} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_S e^{j\omega t} \quad (8.15)$$

Assim:

$$v_{S_+}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{s - j\omega} \quad (8.16)$$

Levando-se (8.16) em (8.12) obtém-se (8.17):

$$i_{S_+}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{\ell} \frac{1}{(s - j\omega) \left(s + \frac{R}{\ell}\right)} \quad (8.17)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace obtém-se a expressão (8.18).

$$\dot{i}_{S_r}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \frac{1}{(R + j\omega\ell)} \left( e^{j\omega t} - e^{-\frac{R}{\ell}t} \right) \quad (8.18)$$

$$R + j\omega\ell = \sqrt{R^2 + \omega^2\ell^2} e^{j\phi_0} \quad (8.19)$$

onde

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{\omega\ell}{R} \right) \quad (8.20)$$

Assim:

$$\dot{i}_{S_r}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s}{\sqrt{R^2 + \omega^2\ell^2}} \left( e^{j(\omega t - \phi_0)} - e^{-\frac{R}{\ell}t - j\phi_0} \right) \quad (8.21)$$

Por outro lado:

$$\dot{i}_{S_d}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left| \dot{i}_{S_r}(t) \right| = \text{Parte real } \dot{i}_{S_r}(t) \quad (8.22)$$

Assim:

$$\dot{i}_{S_d}(t) = \sqrt{3} \frac{v_s}{\sqrt{R^2 + \omega^2\ell^2}} \left( \cos(\omega t - \phi_0) - e^{-\frac{R}{\ell}t} \cos(\phi_0) \right) \quad (8.23)$$

mas,

$$\left| \dot{i}_{S_d} \right| = \left| \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{i}_{S_r} \right| \quad (8.24)$$

Assim:

$$\dot{i}_{S_1}(t) = \frac{\sqrt{2}v_s}{\sqrt{R^2 + \omega^2\ell^2}} \left( \cos(\omega t - \phi_0) - e^{-\frac{R}{\ell}t} \cos(\phi_0) \right) \quad (8.25)$$

A expressão (8.25) representa a corrente transitória na fase 1 do motor. Possui uma componente cosenoidal e uma exponencial. A sua forma está representada na Fig. 8.3.

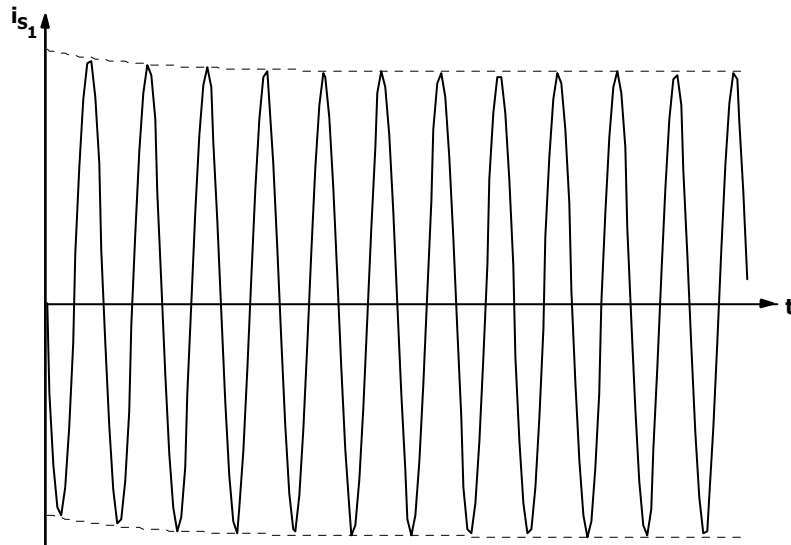


Fig. 8.3 – Corrente transitória na fase 1 um do motor de indução.

Após o transitório a corrente é limitada somente pelas resistências do estator e do rotor e pelas reatâncias de dispersão do motor.

A constante de tempo elétrica é muito pequena. Consideremos a título de exemplo os seguintes valores:

$$\begin{aligned} R_S + R_R &\cong 2,0\Omega \\ Xl_S + Xl_R &\cong 4,0\Omega \end{aligned} \quad (8.26)$$

Assim:

$$l_S + l_R = l = 10,6\text{mH} \quad (8.27)$$

Assim:

$$\tau_e = \frac{l}{R} = \frac{10,6}{2,0} = 5,3\text{ms} \quad (8.28)$$

Supondo que o transitório elétrico esteja terminado após cinco constantes de tempo, tem-se:

$$\Delta t = 5\tau_e = 26,5\text{ms} \quad (8.29)$$

Assim o transitório tem uma duração aproximada de dois ciclos da rede. É muito rápido e na maioria das vezes é desconsiderado.

## 8.2 CURTO-CIRCUITO TRIFÁSICO DO MOTOR DE INDUÇÃO

a) modelos básicos:

Vamos considerar um motor trifásico de indução alimentado pela rede e acionando uma carga mecânica. Num determinado instante, quando  $t = 0$ , é estabelecido um curto circuito trifásico nos seus terminais. Deseja-se expressar, em função do tempo, a evolução das correntes nas fases.

O transitório elétrico de curto-circuito é muito rápido. Por isto, para efeito de estudo, a velocidade do motor será considerada constante.

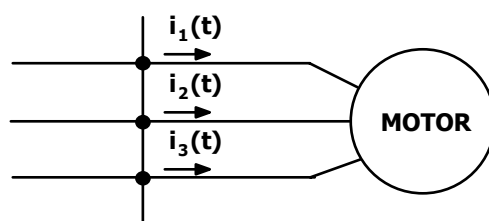


Fig. 8.4 – Representação de um curto-circuito trifásico em um motor de indução.

Seja o modelo sob a forma de componentes simétricas instantâneas, com referencial preso no estator, de acordo com a expressão (8.30).

$$\begin{bmatrix} v_{S+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + p\mathbb{L}_S & pm_{SR} \\ m_{SR}(p - jn\dot{\theta}) & R_R + \mathbb{L}_R(p - jn\dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S+} \\ i_{R+} \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

Para facilitar a análise, a resistência do estator será inicialmente ignorada. Ela influencia basicamente na forma de envoltória da corrente e o seu valor poderá ser incluído no valor de  $R_R$ . Seja  $n\dot{\theta} = \omega_m$  sendo  $\omega_m$  a velocidade do motor.

Durante o curto tem-se  $n\dot{\theta} = \omega_m$ . Assim o modelo adquire a forma de expressão (8.31).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\mathbb{L}_S & pm_{SR} \\ m_{SR}(p - jn\dot{\theta}) & R_R + \mathbb{L}_R(p - jn\dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S+} \\ i_{R+} \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

Tomando-se a transformada de Laplace, obtém-se a expressão (8.32).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbb{L}_S i_{S_+}(s) - \mathbb{L}_S i_{S_{0+}} & m_{SR} i_{R_+}(s) - m_{SR} i_{R_{0+}} \\ m_{SR} (s - j\omega_m) i_{S_+}(s) - m_{SR} i_{S_{0+}} & R_R i_{R_+}(s) + \mathbb{L}_R (s - j\omega_m) i_{R_+}(s) - \mathbb{L}_R i_{R_{0+}} \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

Da expressão (8.32) obtém-se a expressão (8.33).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbb{L}_S & m_{SR} \\ m_{SR} (s - j\omega_m) & R_R + \mathbb{L}_R (s - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_+}(s) \\ i_{R_+}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{L}_S & m_{SR} \\ m_{SR} & \mathbb{L}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_{0+}} \\ i_{R_{0+}} \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

Seja:

$$\phi_{S_{0+}} = \mathbb{L}_S i_{S_{0+}} + m_{SR} i_{R_{0+}} \quad (8.34)$$

$$\phi_{R_{0+}} = m_{SR} i_{S_{0+}} + \mathbb{L}_R i_{R_{0+}} \quad (8.35)$$

O modelo adquire então a forma da expressão (8.36).

$$\begin{bmatrix} \phi_{S_{0+}} \\ \phi_{R_{0+}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbb{L}_S & m_{SR} \\ m_{SR} (s - j\omega_m) & R_R + \mathbb{L}_R (s - j\omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_+}(s) \\ i_{R_+}(s) \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} i_{S_+}(s) \\ i_{R_+}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbb{L}_S & m_{SR} \\ m_{SR} (s - j\omega_m) & R_R + \mathbb{L}_R (s - j\omega_m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_{S_{0+}} \\ \phi_{R_{0+}} \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

Invertendo a matriz  $\mathbf{Z}$  e isolando-se a corrente  $i_{S_+}(s)$ , obtém-se a expressão (8.38).

$$i_{S_+}(s) = \frac{\left[ \frac{R_R}{\mathbb{L}_R} + (s - j\omega_m) \right] \phi_{S_{0+}} - s \frac{m_{SR}}{\mathbb{L}_R} \phi_{R_{0+}}}{s \frac{\mathbb{L}_S}{\mathbb{L}_R} R_R + \left( \mathbb{L}_S - \frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_R} \right) (s - j\omega_m) s} \quad (8.38)$$

$$\mathbb{L}_S' = \mathbb{L}_S - \frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_R} \quad (8.39)$$

Assim:

$$i_{S_+}(s) = \frac{\left[ \frac{R_R}{L_R} + (s - j\omega_m) \right] \phi_{S_{0+}} - s \frac{m_{SR}}{L_R} \phi_{R_{0+}}}{s \frac{L_S}{L_R} R_R + L_S' (s - j\omega_m) s} \quad (8.40)$$

(b) correntes sem amortecimentos:

Para uma máquina ideal na qual não houvesse resistência, a energia inicial acumulada no campo magnético não seria convertida em calor. Assim as correntes de curto-circuito seriam senoidais, com valores de pico invariáveis ao longo do tempo.

Numa primeira etapa da análise, vamos determinar essas correntes. Considerando  $R_R = 0$  na expressão (8.40), obtém-se a expressão (8.41).

$$i_{S_+}(s) = \frac{(s - j\omega_m) \phi_{S_{0+}} - s \frac{m_{SR}}{L_R} \phi_{R_{0+}}}{L_S' (s - j\omega_m) s} \quad (8.41)$$

$$i_{S_+}(s) = \frac{\phi_{S_{0+}}}{s L_S'} - \frac{m_{SR}}{L_S' L_R} \frac{\phi_{R_{0+}}}{(s - j\omega_m)} \quad (8.42)$$

$$i_{S_+}(s) = \frac{1}{L_S'} \left[ \frac{\phi_{S_{0+}}}{s} - \frac{m_{SR}}{L_R} \frac{\phi_{R_{0+}}}{(s - j\omega_m)} \right] \quad (8.43)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace obtém-se a expressão (8.44).

$$i_{S_+}(t) = \frac{1}{L_S'} \left[ \phi_{S_{0+}} - \frac{m_{SR}}{L_R} \phi_{R_{0+}} e^{j\omega_m t} \right] \quad (8.44)$$

Para que a corrente  $i_{S_+}(t)$  fique completamente conhecida, deve-se estabelecer as expressões de  $\phi_{S_{0+}}$  e  $\phi_{R_{0+}}$ .

(c) cálculo dos fluxos iniciais:

Vamos considerar o motor inicialmente em regime permanente. É representado pelas expressões (8.45).

$$\begin{bmatrix} v_{S_{0+}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S & j\omega_S m_{SR} \\ jm_{SR}(\omega_S - \omega_m) & R_R + j\mathbb{L}_R(\omega_S - \omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_{0+}} \\ i_{R_{0+}} \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

$$\omega_R = \omega_S - \omega_m \quad (8.46)$$

$$\begin{bmatrix} v_{S_{0+}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S & j\omega_S m_{SR} \\ jm_{SR} \omega_R & R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_{0+}} \\ i_{R_{0+}} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Da expressão (8.47) obtém-se as correntes iniciais representadas pelas expressões (8.48) e (8.49).

$$i_{S_{0+}} = \frac{(R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R) v_{S_{0+}}}{(R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R)(R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S) + \omega_S \omega_R m_{SR}^2} \quad (8.48)$$

$$i_{R_{0+}} = \frac{-jm_{SR} \omega_R v_{S_{0+}}}{(R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R)(R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S) + \omega_S \omega_R m_{SR}^2} \quad (8.49)$$

Levando-se as expressões (8.48) e (8.49) nas expressões (8.34) e (8.35), obtém-se as expressões dos fluxos iniciais, representados por (8.50) e (8.51).

$$\phi_{S_{0+}} = \frac{(\mathbb{L}_S (R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R) - jm_{SR}^2 \omega_R) v_{S_{0+}}}{(R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R)(R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S) + \omega_S \omega_R m_{SR}^2} \quad (8.50)$$

$$\phi_{R_{0+}} = \frac{(m_{SR} (R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R) - j\mathbb{L}_R m_{SR} \omega_R) v_{S_{0+}}}{(R_R + j\mathbb{L}_R \omega_R)(R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S) + \omega_S \omega_R m_{SR}^2} \quad (8.51)$$

Resta-nos determinar as tensões iniciais. Tomando-se a expressão (8.15) tem-se:

$$v_{S_{\pm}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_S e^{j\omega_S t} \quad (8.52)$$

Para  $t = 0$ , tem-se:

$$v_{S_+} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_S \quad (8.53)$$

As expressões de fluxo inicial são muito complexas para serem levadas na expressão (8.44). Porém algumas modificações podem ser feitas.

$$1) \omega_R \cong 0$$

De fato, se o motor opera na região nominal, próximo da velocidade síncrona, a pulsação rotórica é praticamente nula.

$$2) R_S \cong 0$$

Na região de escorregamento nominal a resistência do estator tem muito pouco influência no comportamento do motor.

Com tais simplificações, os fluxos iniciais passam a ser representados pelas expressões (8.54) e (8.55).

$$\phi_{S_{0+}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{j\omega_S} \quad (8.54)$$

$$\phi_{R_{0+}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_{SR} v_S}{j\omega_S \mathbb{L}_S} \quad (8.55)$$

Assim:

$$\phi_{S_{0+}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{\omega_S} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (8.56)$$

$$\phi_{R_{0+}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_{SR} v_S}{\omega_S \mathbb{L}_S} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (8.57)$$

Levando-se (8.56) e (8.57) em (8.44), obtém-se a expressão (8.58).

$$i_{S_+}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{\omega_S \mathbb{L}_S} \left[ e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_S \mathbb{L}_R} e^{j\left(\omega_m t - \frac{\pi}{2}\right)} \right] \quad (8.58)$$

Por outro lado, a partir da expressão (8.22) obtém-se:

$$i_{s_d}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(i_{s_r}(t)) \quad (8.59)$$

Assim:

$$i_{s_d}(t) = -\sqrt{3} \frac{v_s}{\omega_s \mathbb{L}_s} \frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_s \mathbb{L}_R} \operatorname{sen}(\omega_m t) \quad (8.60)$$

Da expressão (8.24) tem-se:

$$|i_{s_1}| = \left| \sqrt{\frac{2}{3}} i_{s_d} \right| \quad (8.61)$$

Assim:

$$i_{s_1}(t) = -\sqrt{2} \frac{v_s}{X_s} \frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_s \mathbb{L}_R} \operatorname{sen}(\omega_m t) \quad (8.62)$$

onde:

$i_{s_1}(t)$   $\Rightarrow$  corrente na fase 1 do motor.

$X_s' = \omega_s \mathbb{L}_s'$   $\Rightarrow$  reatância transitória.

$\mathbb{L}_s'$   $\Rightarrow$  indutância transitória.

A partir da expressão (8.62) pode-se estabelecer duas conclusões importantes:

(a) a frequência da corrente de curto-circuito é proporcional à velocidade do motor.

(b) o pico da corrente de curto circuito é limitado pela reatância transitória do motor.

Para se conhecer completamente a corrente de curto-circuito, deve-se determinar a lei de decrescimento com o tempo. A expressão (8.62) estabelece a corrente que existiria sem as resistências.

(d) cálculo da corrente de curto-circuito com amortecimento:

Vamos considerar a expressão (8.63), na qual está incluída a resistência do rotor do motor.

$$i_{s_+}(s) = \frac{\left[ \frac{R_R}{L_R} + (s - j\omega_m) \right] \phi_{s_{0+}} - s \frac{m_{SR}}{L_R} \phi_{R_{0+}}}{s \frac{L_S}{L_R} R_R + L_S' (s - j\omega_m) s} \quad (8.63)$$

O denominador pode ser reescrito segundo a expressão (8.64):

$$\Delta = s L_S' \left( s - j\omega_m + \frac{R_R}{L_R} \frac{L_S}{L_S'} \right) \quad (8.64)$$

Seja:

$$\zeta' = \frac{L_S'}{L_S} \frac{L_R}{R_R} \quad (8.65)$$

Assim:

$$\Delta = s L_S' \left( s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right) \right) \quad (8.66)$$

onde  $\zeta'$  é definido como a constante de tempo de curto-circuito do motor.

Levando-se a expressão (8.66) na expressão (8.63) obtém-se a expressão (8.67).

$$i_{s_+}(s) = \frac{\left[ \frac{R_R}{L_R} + (s - j\omega_m) \right] \phi_{s_{0+}} - s \frac{m_{SR}}{L_R} \phi_{R_{0+}}}{s L_S' \left( s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right) \right)} \quad (8.67)$$

Os fluxos iniciais já foram estabelecidos e estão representados pelas expressões (8.68) e (8.69).

$$\phi_{s_{0+}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V_S}{\omega_S} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (8.68)$$

$$\phi_{R_{0+}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_{SR} V_S}{\omega_S L_S} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (8.69)$$

Levando-se as expressões (8.68) e (8.69) na expressão (8.67), obtém-se a expressão .

$$i_{s_+}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s}{\omega_s \mathbb{L}_S} e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{s \left( 1 - \frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_R \mathbb{L}_S} \right) - j\omega_m + \frac{R_R}{\mathbb{L}_R}}{s \left( s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right) \right)} \quad (8.70)$$

Como:

$$\frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_R \mathbb{L}_S} = 1 \quad (8.71)$$

Assim:

$$i_{s_+}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s e^{-j\frac{\pi}{2}}}{X_s'} \frac{\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m}{s \left( s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right) \right)} \quad (8.72)$$

Seja:

$$\frac{\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m}{s \left( s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right) \right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right)} \quad (8.73)$$

Assim:

$$A = \frac{\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m}{\frac{1}{\zeta'} - j\omega_m} = \frac{\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m}{\frac{\mathbb{L}_S}{\mathbb{L}_S'} \frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m} \quad (8.74)$$

$$B = \frac{\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m}{j\omega_m - \frac{1}{\zeta'}} = -A \quad (8.75)$$

Levando-se as expressões (8.74) e (8.75) na expressão (8.76) obtém-se a expressão .

$$i_{s_r}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s e^{-j\frac{\pi}{2}}}{X_s'} \frac{\frac{R_R}{L_R} - j\omega_m}{\frac{L_s'}{L_s} \frac{R_R}{L_R} - j\omega_m} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right)} \right] \quad (8.77)$$

mas,

$$\frac{\frac{R_R}{L_R} - j\omega_m}{\frac{L_s'}{L_s} \frac{R_R}{L_R} - j\omega_m} \cong 1 \quad (8.78)$$

Assim:

$$i_{s_r}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s e^{-j\frac{\pi}{2}}}{X_s'} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s - \left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right)} \right] \quad (8.79)$$

Aplicando-se a transformação inversa de Laplace obtém-se a expressão .

$$i_{s_r}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s e^{-j\frac{\pi}{2}}}{X_s'} \left[ 1 - e^{\left( j\omega_m - \frac{1}{\zeta'} \right) t} \right] \quad (8.80)$$

$$i_{s_r}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s}{X_s'} \left[ e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{j\left( \omega_m - \frac{\pi}{2} \right) t} e^{-\frac{1}{\zeta'} t} \right] \quad (8.81)$$

como:

$$i_{s_d}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ i_{s_r}(t) \} \quad (8.82)$$

obtém-se:

$$i_{s_d}(t) = \sqrt{3} \frac{v_s}{X_s'} \operatorname{sen}(\omega_m t) e^{-\frac{1}{\zeta'} t} \quad (8.83)$$

Portanto a corrente na fase 1 do motor é representada pela expressão (8.84).

$$i_{S_1}(t) = \sqrt{2} \frac{V_{S_1}}{X_S} e^{-\frac{1}{\zeta'} t} \sin(\omega_m t) \quad (8.84)$$

A forma da corrente está representada na Fig. 8.5.

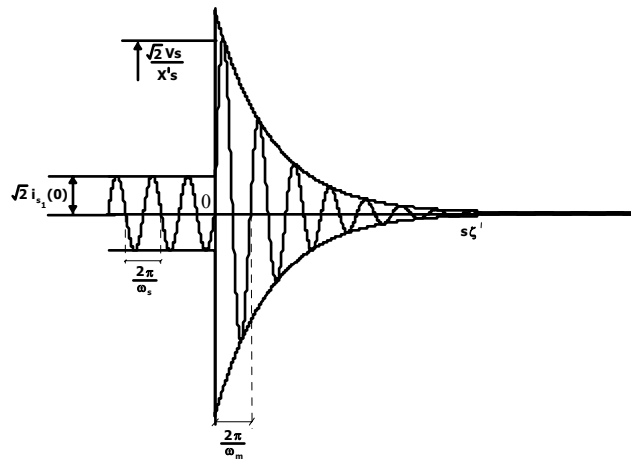


Fig. 8.5 – Formato da corrente de curto-circuito na fase um.

Vamos fazer um comentário adicional sobre a constante de tempo de curto-circuito.

$$\zeta' = \frac{L'_S}{L_S} \frac{L_R}{R_R} \quad (8.85)$$

$$\zeta_R = \frac{L_R}{R_R} \quad (8.86)$$

onde  $\zeta_R$  é definida como constante de tempo de circuito aberto.

Assim:

$$\zeta' = \zeta_R \frac{L'_S}{L_S} \quad (8.87)$$

Durante o curto-circuito o motor pode ser representado pelo circuito equivalente mostrado na Fig. 8.6.

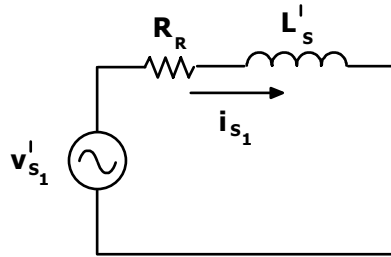


Fig. 8.6 – Circuito equivalente para o motor para análise de curto-circuito.

A tensão  $v_{s_1}'$  tem um valor de pico igual a  $\sqrt{2}v_s$ .

Como  $L_S \cong L_R$  quando os parâmetros estão referidos ao estator, pode-se afirmar que:

$$\zeta' = \frac{L_S'}{R_R} \quad (8.88)$$

(e) comentários sobre a reatância transitória:

A indutância transitória é definida pela expressão (8.89).

$$L_S' = L_S - \frac{m_{SR}^2}{L_R} \quad (8.89)$$

mas:

$$L_S = \ell_S + am_{SR} \quad (8.90)$$

$$L_R = \frac{\ell_R + am_{SR}}{a^2} \quad (8.91)$$

onde:

$a \Rightarrow$  relação de transformação entre os enrolamentos do estator e do rotor.

$\ell_S \Rightarrow$  indutância de dispersão do estator.

$\ell_R \Rightarrow$  indutância de dispersão do rotor referido ao estator.

Assim:

$$\mathbb{L}'_S = \ell_S + a m_{SR} - \frac{a^2 m_{SR}^2}{\ell_R + a m_{SR}} \quad (8.92)$$

Multiplicando-se convenientemente os termos por  $\omega_S$ , obtém-se:

$$\omega_S \mathbb{L}'_S = \omega_S \ell_S + a \omega_S m_{SR} - \frac{a^2 \omega_S^2 m_{SR}^2}{\omega_S \ell_R + \omega_S a m_{SR}} \quad (8.93)$$

Assim:

$$X'_S = x_S + x_m - \frac{x_m^2}{x_R + x_m} \quad (8.94)$$

Portanto a reatância transitória pode ser facilmente determinada, a partir dos ensaios a vazio e de rotor bloqueado.

Convém observar que  $X'_S$  é relativamente baixa. Tomemos os seguintes valores numéricos como exemplos:

$$x_S = 1\Omega$$

$$x_R = 1\Omega$$

$$x_m = 100\Omega$$

Assim:

$$X'_S = 1\Omega$$

### 8.3 TENSÃO RESIDUAL

---

Há certos tipos de cargas, como por exemplos bombas de refrigeração de centrais térmicas, que não podem ser paralisadas mesmo por tempo muito curto. Essas cargas em geral, são acionadas por motores trifásicos de indução.

Nesses casos, dispõe-se de duas fontes de alimentação. Quando a fonte principal falha, o motor automaticamente passa a ser alimentado por uma fonte de emergência.

Quando a fonte principal é interrompida, existe fluxo magnético no motor. Estes fluxos geram tensões nos enrolamentos do estator, enquanto ele permanece aberto. Essas tensões são conhecidas com o nome de tensões residuais.

Se a fonte auxiliar for conectada imediatamente após a falha da fonte principal e se as tensões da fonte e as tensões residuais estiverem com defasamento inadequado, podem ser produzidos transitórios de correntes e de torques capazes de danificar o motor. Uma solução possível para resolver esse tipo de problema, consistem em instalar relés controlados por tensão. Somente quando as tensões residuais atingirem valores iguais a 25% da tensão de alimentação, a fonte auxiliar é conectada ao motor.

Neste item será obtida uma expressão aproximada, analiticamente, para representar as tensões residuais geradas pelo motor.

Consideremos o modelo do motor de indução sob a forma de componentes simétricas instantâneas, representado pela expressão (8.95). O referencial será colocado no estator.

$$\begin{bmatrix} v_{S_+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + p\mathbb{L}_S & pm_{SR} \\ m_{SR}(p - jn\dot{\theta}) & R_R + \mathbb{L}_R(p - jn\dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{S_+} \\ \dot{i}_{R_+} \end{bmatrix} \quad (8.95)$$

Durante o transitório a corrente do estator  $i_{S_+}$  é nula. Assim o modelo passa a ser representado pelas expressões (8.96) e (8.97). A velocidade  $\omega_m$  será considerada constante.

$$v_{S_+} = pm_{SR}\dot{i}_{R_+} \quad (8.96)$$

$$0 = R_R\dot{i}_{R_+} + p\mathbb{L}_R\dot{i}_{R_+} - j\omega_m\mathbb{L}_R\dot{i}_{R_+} \quad (8.97)$$

Para se conhecer a tensão do estator em função do tempo, deve-se conhecer a corrente do rotor, que é obtida a partir da solução da equação (8.97).

Aplicando-se a transformada de Laplace na expressão (8.97) obtém-se a expressão (8.98).

$$0 = R_R i_{R_+}(s) + sL_R i_{R_+}(s) - j\omega_m L_R i_{R_+}(s) - L_R i_{R0_+} \quad (8.98)$$

Assim:

$$i_{R_+}(s) = \frac{i_{R0_+}}{s + \left( \frac{R_R}{L_R} - j\omega_m \right)} \quad (8.99)$$

Passando para o domínio tempo, obtém-se a expressão .

$$i_{R_+}(t) = i_{R0_+} e^{-\left( \frac{R_R}{L_R} - j\omega_m \right)t} \quad (8.100)$$

Para se conhecer a tensão do estator, a expressão (8.96) é levada na expressão (8.100) resultando na expressão (8.101).

$$v_{S_+} = m_{SR} \frac{d}{dt} \left( i_{R0_+} e^{-\left( \frac{R_R}{L_R} - j\omega_m \right)t} \right) \quad (8.101)$$

Assim:

$$v_{S_+} = m_{SR} \left( j\omega_m - \frac{R_R}{L_R} \right) i_{R0_+} e^{-\frac{R_R}{L_R}t} e^{j\omega_m t} \quad (8.102)$$

O valor inicial da corrente do rotor, definido pela expressão (8.49) é representado pela expressão (8.103).

$$i_{R0_+} = \frac{-jm_{SR}\omega_R v_{S0_+}}{(R_R + jL_R\omega_R)(R_S + j\omega_S L_S) + \omega_S\omega_R m_{SR}^2} \quad (8.103)$$

$$v_{S0_+} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_S \quad (8.104)$$

Assim:

$$i_{R0_+} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{-jm_{SR}\omega_R v_S}{(R_R + jL_R\omega_R)(R_S + j\omega_S L_S) + \omega_S\omega_R m_{SR}^2} \quad (8.105)$$

Vamos tomar:

$$\omega_R \cong 0 \text{ e } R_S \cong 0$$

Assim:

$$i_{R_{0+}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_{SR} \omega_R v_S}{R_R \omega_S \mathbb{L}_S} \quad (8.106)$$

Levando-se a expressão (8.106) na expressão (8.102) obtém-se a expressão (8.107).

$$v_{S_+}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{\omega_S \mathbb{L}_S} \frac{m_{SR}^2 \omega_R}{R_R} \left( \frac{R_R}{\mathbb{L}_R} - j\omega_m \right) e^{-\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} t} e^{j\omega_m t} \quad (8.107)$$

ou

$$v_{S_+}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{\omega_S \mathbb{L}_S} \frac{m_{SR}^2 \omega_R}{R_R \mathbb{L}_R} (R_R - j\omega_m \mathbb{L}_R) e^{-\frac{R_R}{\mathbb{L}_R} t} e^{j\omega_m t} \quad (8.108)$$

$$\zeta_R = \frac{\mathbb{L}_R}{R_R} \Rightarrow \text{constante de tempo de circuito aberto.}$$

$$R_R - j\omega_m \mathbb{L}_R = \sqrt{R_R^2 + \omega_m^2 \mathbb{L}_R^2} e^{-j\theta_R} \quad (8.109)$$

$$\theta_R = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_m \mathbb{L}_R}{R_R} \right) \quad (8.110)$$

Assim:

$$v_{S_+}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_S}{\omega_S \mathbb{L}_S} \frac{m_{SR}^2 \omega_R}{R_R \mathbb{L}_R} \sqrt{R_R^2 + \omega_m^2 \mathbb{L}_R^2} e^{-\frac{t}{\zeta_R}} \left\{ e^{j(\omega_m t - \theta_R)} \right\} \quad (8.111)$$

Por outro lado,

$$\frac{m_{SR}^2}{\mathbb{L}_R \mathbb{L}_S} \approx 1 \quad (8.112)$$

Assim:

$$v_{S_r}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} v_S \frac{\omega_R}{\omega_S} \left( \sqrt{1 + \omega_m^2 \zeta_R^2} \right) e^{-\frac{t}{\zeta_R}} \cos(\omega_m t - \theta_R) \quad (8.113)$$

Em geral, a constante  $\zeta_R$  é importante e a hipótese de que a velocidade do motor se mantém invariável não é válida.

Se o motor inicialmente gira a vazio tem-se  $\omega_m \cong \omega_S$ , sendo  $\omega_S$  a velocidade síncrona.

Se o motor estivesse girando com velocidade síncrona, acionada por uma máquina auxiliar,  $\omega_R$  seria nula, não havendo correntes rotóricas e conseqüentemente não existiria correntes rotóricas e conseqüentemente não existiria tensão residual.

O estudo rigoroso de tensão residual não pode ignorar a equação mecânica e só é possível através de simulação.