

1. CAPÍTULO 1

1) $I = 2\text{A}$

$\mu_R = 2500$

$\ell = 40\text{cm}$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m (SI)}$

$s = 5\text{cm}^2$

$m = 50\text{kg}$

Deseja-se calcular o número de espiras n

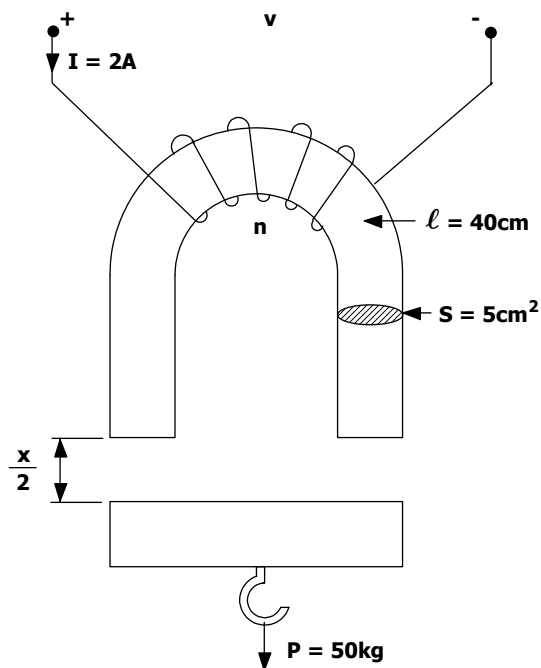


Fig. 1 – Eletroímã do exercício 1.

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \quad (1)$$

$$L = \frac{n^2}{R} \quad (2)$$

$$R_1 = \frac{1}{\mu_1} \frac{\ell}{s} = \frac{1}{\mu_0 \mu_R} \frac{\ell}{s} \quad (\text{relutância do ferro}) \quad (3)$$

$$R_2 = \frac{1}{\mu_0} \frac{x}{s} \quad (\text{relutância do entreferro}) \quad (4)$$

$$R = R_1 + R_2 \quad (5)$$

$$R = \frac{1}{\mu_0 \mu_R} \frac{\ell}{s} + \frac{1}{\mu_0} \frac{x}{s} \quad (6)$$

$$L = \frac{n^2}{\frac{1}{\mu_0 \mu_R} \frac{\ell}{s} + \frac{1}{\mu_0} \frac{x}{s}} \quad (7)$$

$$L = \frac{n^2 \mu_0 s}{\frac{\ell}{\mu_R} + x} \quad (8)$$

Seja:

$$A = n^2 \mu_0 s \quad (9)$$

$$B = \frac{\ell}{\mu_R} \quad (10)$$

Assim:

$$L = \frac{A}{B + x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{A}{(B + x)^2} = -\frac{n^2 \mu_0 s}{\left(\frac{\ell}{\mu_R} + x\right)^2} \quad (12)$$

Assim:

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{n^2 \mu_0 s}{\left(\frac{\ell}{\mu_R} + x \right)^2} \quad (13)$$

Para $x = 0$ tem-se:

$$F = \frac{1}{2} i^2 n^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{\mu_R \mu_0 s} \right)^2 \mu_0 s} \quad (14)$$

$$n = \sqrt{\frac{2F \mu_0 s}{i^2} \left(\frac{1}{\mu_R \mu_0 s} \right)^2} \quad (15)$$

Entrando-se com os valores das grandezas na expressão (15), todas do Sistema Internacional obtém-se:

$$n \cong 100 \text{ espiras}$$

2) O circuito magnético equivalente é apresentado na Fig. 2.

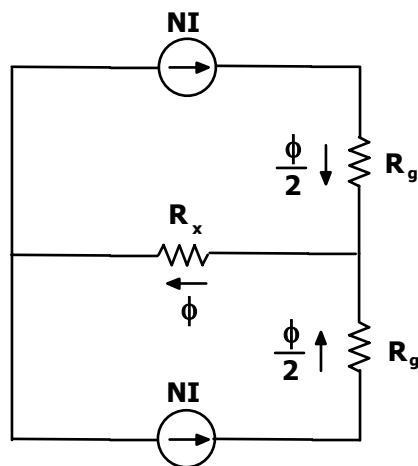


Fig. 2 – Circuito magnético equivalente do exercício 2.

$$NI = R_g \frac{\phi}{2} + R_x \phi = \left(\frac{R_g}{2} + R_x \right) \phi \quad (16)$$

Assim:

$$R = \frac{R_g}{2} + R_x \quad (17)$$

$$R_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{x}{d^2} \quad (18)$$

$$R_g = \frac{2}{\mu_0} \frac{g}{d^2} \quad (19)$$

$$R = \frac{1}{\mu_0 d^2} (g + x) \quad (20)$$

$$L = \frac{N^2 \mu_0 d^2}{(g + x)} \quad (21)$$

para uma bobina.

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{N^2 \mu_0 d^2}{(g + x)^2} \quad (23)$$

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{N^2 \mu_0 d^2}{(g + x)^2} \quad (24)$$

Para $x = 0$, tem-se:

$$F = \frac{I^2 N^2 \mu_0 d^2}{2g^2} \quad (25)$$

Supondo:

$$g = 0,001\text{m}$$

$$I = 0,5\text{A}$$

$$d = 0,04\text{m}$$

$$N = 1000$$

$$F = \frac{0,5^2 \cdot 1000^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,04^2}{2 \cdot 0,001^2} \quad (26)$$

$$F \cong 251,2\text{N} \quad (27)$$

3)

$$\text{a)} \quad v = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (28)$$

$$L = A + Bx \quad (29)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt} = B \frac{dx}{dt} \quad (30)$$

$$v = \frac{d(Li)}{dt} = (A + Bx) \frac{di}{dt} + iB \frac{dx}{dt} \quad (31)$$

$$\text{b)} \quad F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{i^2 B}{2} \quad (32)$$

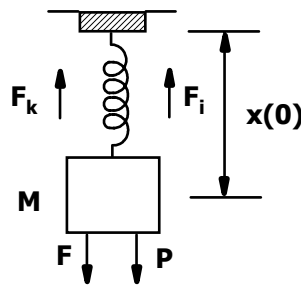


Fig. 3 – Diagrama de forças do sistema mecânico.

$$\text{c)} \quad F_k = kx \quad (33)$$

$$F_i = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (34)$$

$$P = mg \quad (35)$$

Na condição inicial de equilíbrio tem-se:

$$P = F_{k_0} \quad (36)$$

$$mg = kx_0 \quad (37)$$

A equação mecânica será:

$$\frac{1}{2}i^2B = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \quad (38)$$

sendo x o deslocamento em relação à x_0 .

4) Dados:

$$L_1 = 0,2 \text{ mH} = 0,2 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$L_2 = 0,1 \text{ mH} = 0,1 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$M = 0,05 \cos \theta \text{ mH} = 0,05 \cos \theta \times 10^{-3} \text{ H} = m_0 \cos \theta$$

$$i_1 = i_2 = i = \sqrt{2} 5 \text{ sen } \omega t$$

(a)

$$T = m_0 i_m^2 \text{ sen}^2 \omega t \text{ sen } \theta \quad (39)$$

$$T_{\text{md}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m_0 i_m^2 \text{ sen}^2 \omega t \text{ sen } \theta d\omega t \quad (40)$$

$$T_{\text{md}} = \frac{m_0 i_m^2 \text{ sen } \theta}{2\pi} \left(\frac{\omega t}{2} - \frac{\text{sen}^2 \omega t}{4} \right)_0^{2\pi} \quad (41)$$

$$T_{\text{md}} = \frac{m_0 i_m^2 \text{ sen } \theta}{2} \quad (42)$$

Substituindo os valores obtém-se:

$$T_{\text{md}} = 0,00125 \text{ sen } \theta \quad (43)$$

(b) Seja o torque da mola:

$$T_k = k \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (44)$$

Para $\theta = \pi/2$ o torque da mola é nulo.

No ponto de equilíbrio tem-se

$$T_k = T_{md} \quad (45)$$

$$k \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{m_0 i_m^2 \text{sen } \theta}{2} \quad (46)$$

Assim:

$$0,004 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = 0,00125 \text{sen } \theta \quad (47)$$

$$3,2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = \text{sen } \theta \quad (48)$$

Esta é uma equação transcendental e sua solução somente é possível numericamente e ou graficamente. Reescrevendo (48) na forma da equação (49) pode-se obter o gráfico da Fig. 4 e encontrar o valor de θ que satisfaz a igualdade.

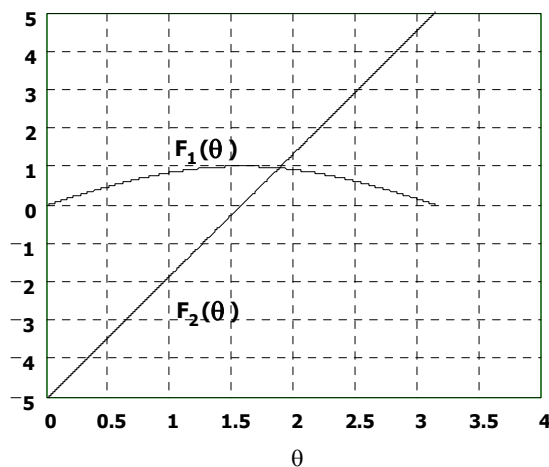


Fig. 4 – Resolução gráfica da equação (48).

$$F_1(\theta) = \text{sen } \theta$$

$$F_2(\theta) = 3,2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad (49)$$

Pela Fig. 4 o ângulo é:

$$\theta = 1,87 \text{ rad}$$

$$\theta = 107,13^\circ \quad (50)$$

Deve-se tomar um cuidado na resolução deste exercício pois se θ está em radianos, $F_2(\theta)$ apresenta uma inclinação diferente do que em graus. O correto é utilizar como referência o sistema em radianos.

5)

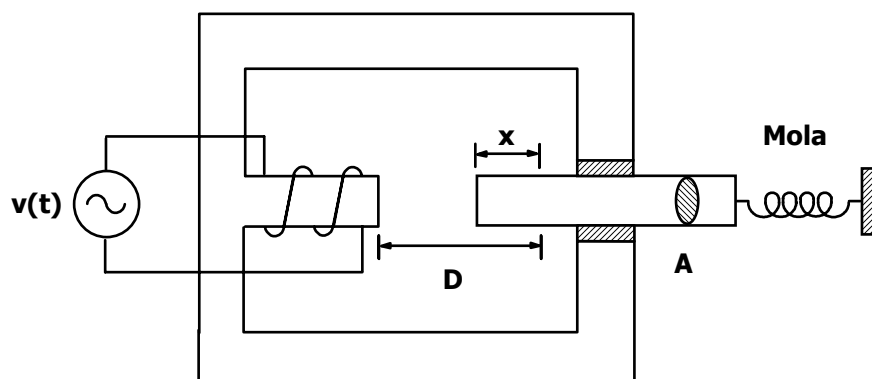


Fig. 5 – Instrumento do tipo ferro móvel do exercício 5.

(a)

$$L = \frac{N^2}{R} \quad (51)$$

$$R = \frac{1}{\mu_0} \frac{(D-x)}{A} \quad (52)$$

$$L = \frac{N^2 A \mu_0}{(D-x)} \quad (53)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{N^2 A \mu_0}{(D-x)^2} \quad (54)$$

$$F_e = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{N^2 I^2 A \mu_0}{2(D-x)^2} = \frac{1}{2} \frac{N^2 I^2}{\frac{1}{\mu_0^2} \left(\frac{D-x}{A} \right)^2 A \mu_0} \quad (55)$$

Como:

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{N^2 \mu_0^2} \left(\frac{D-x}{A} \right)^2 \quad (56)$$

$$\phi = LI$$

Tem-se:

$$F_e = \frac{1}{2A\mu_0} \phi^2 \quad (57)$$

Mas:

$$\phi^2 = B^2 A^2 = B_m^2 \text{sen}^2 \omega t A^2 \quad (58)$$

Assim:

$$F_e = \frac{1}{2\mu_0} AB_m^2 \text{sen}^2 \omega t \quad (59)$$

(b)

$$v(t) = N \frac{d\phi}{dt} \quad (60)$$

$$v(t) = N \frac{d(AB_m \text{sen} \omega t)}{dt} \quad (61)$$

$$v(t) = AN\omega B_m \cos \omega t \quad (62)$$

(c)

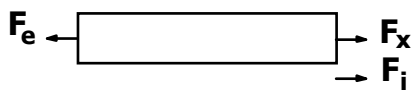


Fig. 6 – Representação das forças mecânicas envolvidas.

$$F_e = F_k + F_i \quad (63)$$

$$\frac{1}{2\mu_0} AB_m^2 \sin^2 \omega t = kx + M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (64)$$

2. CAPÍTULO 2

(1)

$$T = \mathbf{i}_S^t \frac{\partial \mathbf{L}_{SR}(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{i}_R \quad (65)$$

onde:

$$\mathbf{i}_S = I_S \begin{bmatrix} \cos(\omega_s t + \theta_s) \\ \cos\left(\omega_s t + \theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega_s t + \theta_s - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{i}_R = I_R \begin{bmatrix} \cos(\omega_R t + \theta_R) \\ \cos\left(\omega_R t + \theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega_R t + \theta_R - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{L}_{SR} = M_{SR} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (68)$$

Levando as expressões (66), (67) e (68) na expressão (65), obtém-se:

$$\begin{aligned} T &= M_{SR} I_S I_R \left[\cos\left(\bar{\omega}_s t\right) \cos\left(\bar{\omega}_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\bar{\omega}_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos \theta \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cos\left(\bar{\omega}_R t\right) \\ \cos\left(\bar{\omega}_R t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\bar{\omega}_R t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

onde:

$$\bar{\omega}_s t = \omega_s t + \theta_s \quad (70)$$

$$\bar{\omega}_R t = \omega_R t + \theta_R \quad (71)$$

Multiplicando-se as duas últimas matrizes da equação (69) obtém-se:

$$T = \frac{3}{2} M_{SR} I_S I_R \left[\cos\left(\bar{\omega}_s t\right) \cos\left(\bar{\omega}_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\bar{\omega}_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \cos\left(\theta + \bar{\omega}_R t\right) \\ \cos\left(\theta + \bar{\omega}_R t + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \bar{\omega}_R t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (72)$$

A partir da expressão (72), obtém-se a expressão (73).

$$T = \frac{3}{2} M_{SR} I_S I_R \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos(\bar{\omega}_S t) \cos\left(\theta + \bar{\omega}_R t\right) + \cos\left(\bar{\omega}_S t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\theta + \bar{\omega}_R t + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\bar{\omega}_S t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\theta + \bar{\omega}_R t + \frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad (73)$$

Desenvolvendo-se a expressão (73), obtém-se a expressão (74).

$$T = \frac{9}{4} M_{SR} I_S I_R \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos(\bar{\omega}_S t - \bar{\omega}_R t - \theta) \right) \quad (74)$$

Assim:

$$T = \frac{9}{4} M_{SR} I_S I_R \operatorname{sen}(-\bar{\omega}_S t + \bar{\omega}_R t + \theta) \quad (75)$$

Levando-se as expressões (70) e (71) na expressão (75), obtém-se:

$$T = \frac{9}{4} M_{SR} I_S I_R \operatorname{sen}(-\omega_S t - \theta_S + \omega_R t + \theta_R + \theta) \quad (76)$$

$$T = \frac{9}{4} M_{SR} I_S I_R \operatorname{sen}(-\omega_S t - \theta_S + \omega_R t + \theta_R + \omega_m) \quad (77)$$

Mas,

$$\omega_m t - \omega_S t + \omega_R t = 0 \quad (78)$$

Assim:

$$T = \frac{9}{4} M_{SR} I_S I_R \operatorname{sen}(\theta_R - \theta_S) \quad (79)$$

A diferença $(\theta_R - \theta_S)$ representa o defasamento entre as correntes do estator e as do rotor. Seja $\Delta = (\theta_R - \theta_S)$.

Assim:

$$T = \frac{9}{4} M_{SR} I_S I_R \operatorname{sen} \Delta \quad (80)$$

Quando as correntes estiverem em fase o torque será nulo.

A título de exemplo vamos tomar uma máquina com:

$$I_S = 10A$$

$$I_R = 10A$$

$$M_{SR} = 0,245H$$

$$\Delta = (\theta_R - \theta_S) = 45^\circ$$

$$\text{sen } \Delta = 0,866$$

Assim:

$$T = \frac{9}{4} \cdot 0,265 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0,866 \quad (81)$$

$$T = 51,63N \cdot m \quad (82)$$

A máquina de dois pólos gira com velocidade próxima de 377rad/s. Assim a potência desenvolvida pela máquina será:

$$P = T\omega_m = 51,63 \cdot 377 \quad (83)$$

$$P = 19,47kW \quad (84)$$

3. CAPÍTULO 3

1)

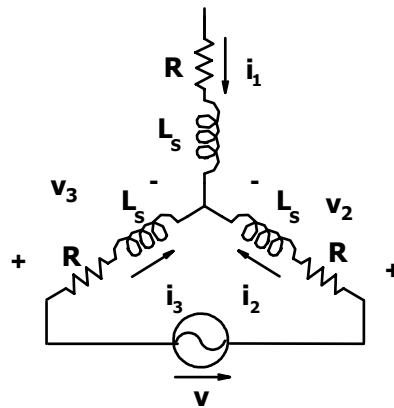


Fig. 7 – Rotor trifásico com uma fase em aberto.

$$v = 380V$$

$$i_1 = 0$$

$$i_2 = -i_3$$

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \tag{85}$$

Assim:

$$i_0 = i_\alpha = 0 \tag{86}$$

$$i_\beta = \sqrt{2} i_2 \tag{87}$$

Os circuitos de seqüência 0 e α estão abertos. O circuito de seqüência β está representado a seguir.

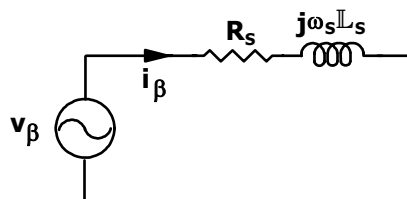


Fig. 8 – Circuito de seqüência β .

$$v + v_3 = v_2 \Rightarrow v = v_2 - v_3 \tag{88}$$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$v_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_2 - v_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} v \quad (90)$$

Que é o valor eficaz.

$$v_\beta = (R_s + j\omega_s L_s) i_\beta \quad (91)$$

Assim,

$$i_\beta = \frac{v}{\sqrt{2} (R_s + j\omega_s L_s)} \quad (92)$$

Que é o valor eficaz.

$$i_2 = \frac{i_\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow i_2 = \frac{v}{2(R_s + j\omega_s L_s)} \quad (93)$$

$$i_3 = -\frac{v}{2(R_s + j\omega_s L_s)} \quad (94)$$

Assim:

$$i_2 = -i_3 = \frac{380}{2(1 + j377 \cdot 0,28)} = 1,8^{90} \text{ A} \quad (95)$$

2)

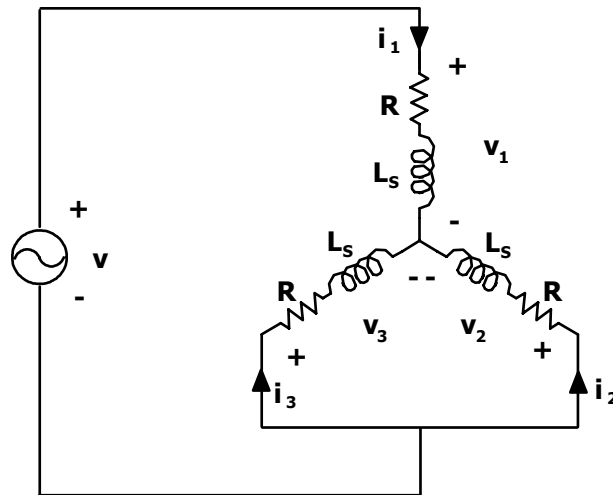


Fig. 9 – Reator trifásico do exercício 2.

$$v_2 = v_3 \quad (96)$$

$$-v + v_1 = v_2 \quad (97)$$

$$v_1 = \frac{2}{3}v \quad (98)$$

$$v_2 = v_3 = -\frac{1}{3}v \quad (99)$$

Aplicando-se a transformada $\alpha\beta 0$ obtém-se:

$$v_0 = v_\beta = 0 \quad (100)$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}v \quad (101)$$

Assim:

$$I_0 = I_\beta = 0 \quad (102)$$

$$I_\alpha = \frac{v_\alpha}{Z_\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{v}{R_s + j\omega_s L_s} \quad (103)$$

Por outro lado:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (104)$$

Assim:

$$I_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} I_\alpha \quad (105)$$

$$I_2 = -\frac{I_\alpha}{\sqrt{6}} \quad (106)$$

$$I_3 = -\frac{I_\alpha}{\sqrt{6}} \quad (107)$$

3) Foi estabelecido que:

$$v_0 = R i_0 + p L i_0 \quad (108)$$

$$v_\alpha = R i_\alpha + p L i_\alpha \quad (109)$$

$$v_\beta = R i_\beta + p L i_\beta \quad (110)$$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 100 \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$v_0 = 103,92V \quad (112)$$

$$v_{\alpha} = -12,25V \quad (113)$$

$$v_{\beta} = -49,5V \quad (114)$$

Resolvendo-se as equações acima obtém-se:

(a)

$$i_0 = \frac{V_0}{R} = 207,84A \quad (115)$$

pois

$$\mathbb{L}_0 = L + 2M = 60 - 60 = 0 \quad (116)$$

(b)

$$i_{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{\mathbb{L}_s} t} \right) = -24,5 \left(1 - e^{-5,55t} \right) A \quad (117)$$

pois

$$\mathbb{L}_s = L - M = 60 + 30 = 90\text{mH} = 0,09H \quad (118)$$

(c)

$$i_{\beta} = \frac{V_{\beta}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{\mathbb{L}_s} t} \right) = -99 \left(1 - e^{-5,55t} \right) A \quad (119)$$

As correntes nos enrolamentos são calculadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i_0}{\sqrt{2}} + i_{\alpha} \right) \\ i_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i_0}{\sqrt{2}} - \frac{i_{\alpha}}{2} + \frac{\sqrt{3} i_{\beta}}{2} \right) \\ i_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i_0}{\sqrt{2}} - \frac{i_{\alpha}}{2} - \frac{\sqrt{3} i_{\beta}}{2} \right) \end{aligned} \quad (120)$$

Assim:

$$\begin{aligned}i_1 &= (100 + 20e^{-5,55t}) \text{ A} \\i_2 &= (60 + 60e^{-5,55t}) \text{ A} \\i_3 &= (200 - 80e^{-5,55t}) \text{ A}\end{aligned}\tag{121}$$

Em regime permanente tem-se $e^{-5,55t} = 0$.

Assim:

$$\begin{aligned}i_1 &= 100 \text{ A} \\i_2 &= 60 \text{ A} \\i_3 &= 200 \text{ A}\end{aligned}\tag{122}$$

Estes resultados poderiam ser obtidos sem resolver as equações diferenciais. Estas correntes são limitadas apenas pelas resistências.

Como explicar a existência de corrente nos enrolamentos quando $t=0$?

4) Seja

$$\begin{aligned}v_1 &= V \cos(\omega t - \Delta) \\v_2 &= V \cos(\omega t - \Delta - 120^\circ) \\v_3 &= V \cos(\omega t - \Delta - 240^\circ)\end{aligned}\tag{123}$$

Como:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 100 \end{bmatrix}\tag{124}$$

$$\begin{aligned}
 v_0 &= 0 \\
 v_\alpha &= \sqrt{\frac{3}{2}} V \cos(\omega t - \Delta) \\
 v_\beta &= \sqrt{\frac{3}{2}} V \text{sen}(\omega t - \Delta)
 \end{aligned} \tag{125}$$

Os modelos dos circuitos de seqüência 0, α e β são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= (R + p\mathbb{L}_0) i_0 \\
 v_\alpha &= (R + p\mathbb{L}_\alpha) i_\alpha \\
 v_\beta &= (R + p\mathbb{L}_\beta) i_\beta
 \end{aligned} \tag{126}$$

$$i_0 = 0 \tag{127}$$

$$\begin{aligned}
 (R + p\mathbb{L}_\alpha) i_\alpha &= \sqrt{\frac{3}{2}} V \cos(\omega t - \Delta) \\
 (R + p\mathbb{L}_\beta) i_\beta &= \sqrt{\frac{3}{2}} V \text{sen}(\omega t - \Delta)
 \end{aligned} \tag{128}$$

Resolvendo-se as equações diferenciais acima obtém-se:

$$\begin{aligned}
 i_\alpha(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V}{Z} \left(\cos(\omega t - \Delta - \phi) - \cos(\Delta + \phi) e^{-\frac{t}{\zeta}} \right) \\
 i_\beta(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V}{Z} \left(\text{sen}(\omega t - \Delta - \phi) + \text{sen}(\Delta + \phi) e^{-\frac{t}{\zeta}} \right)
 \end{aligned} \tag{129}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 Z &= \sqrt{R^2 + \omega^2 \mathbb{L}_S^2} \\
 \zeta &= \frac{\mathbb{L}_S}{R} \\
 \phi &= \text{tg}^{-1} \frac{\omega \mathbb{L}_S}{R}
 \end{aligned} \tag{130}$$

As correntes nas fases do reator são representadas pelas expressões abaixo:

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i_0(t)}{\sqrt{2}} + i_\alpha(t) \right) \\
 i_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i_0(t)}{\sqrt{2}} - \frac{i_\alpha(t)}{2} + \frac{\sqrt{3} i_\beta(t)}{2} \right) \\
 i_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{i_0(t)}{\sqrt{2}} - \frac{i_\alpha(t)}{2} - \frac{\sqrt{3} i_\beta(t)}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{131}$$

Substituindo-se as correntes $i_0(t)$, $i_\alpha(t)$ e $i_\beta(t)$ nas expressões acima, obtém-se as correntes de fase do reator durante o transitório.

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= \frac{V}{Z} \left(\cos(\omega t - \Delta - \phi) - \cos(\Delta + \phi) e^{-\frac{t}{\zeta}} \right) \\
 i_2(t) &= \frac{V}{Z} \left(\cos(\omega t - \Delta - \phi - 120^\circ) + \cos(\Delta + \phi + 60) e^{-\frac{t}{\zeta}} \right) \\
 i_3(t) &= \frac{V}{Z} \left(\cos(\omega t - \Delta - \phi + 120^\circ) + \cos(\Delta + \phi - 60) e^{-\frac{t}{\zeta}} \right)
 \end{aligned} \tag{132}$$

4. CAPÍTULO 4

1)

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= \sqrt{2} v_s \text{sen}(\omega_s t + \phi) \\
 v_2(t) &= \sqrt{2} v_s \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \phi) \\
 v_3(t) &= \sqrt{2} v_s \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \phi)
 \end{aligned} \tag{133}$$

(a) Para o referencial colocado no estator tem-se:

$$\begin{aligned}
 v_{S_\alpha} &= v_{S_d} \\
 v_{S_\beta} &= v_{S_q}
 \end{aligned} \tag{134}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} v_{S_0} \\ v_{S_d} \\ v_{S_q} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_1} \\ v_{S_2} \\ v_{S_3} \end{bmatrix} \quad (135)$$

Assim:

a.1)

$$v_{S_0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} v_S \left(\text{sen}(\omega_s t + \phi) + \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \phi) + \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \phi) \right) \quad (136)$$

$$v_{S_0} = 0$$

a.2)

$$v_{S_d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2} v_S \left(\text{sen}(\omega_s t + \phi) - \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \phi) - \frac{1}{2} \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \phi) \right) \quad (137)$$

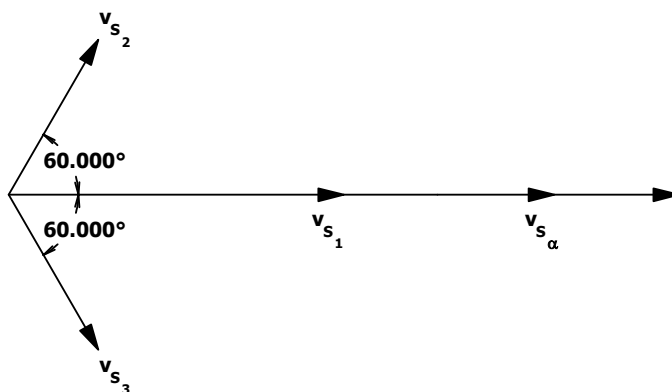


Fig. 10 – Diagrama de fasores para o eixo direto.

$$v_{S_d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2} v_S \frac{3}{2} \text{sen}(\omega_s t + \phi) \quad (138)$$

$$v_{S_d} = \sqrt{3} v_S \text{sen}(\omega_s t + \phi) \quad (139)$$

a.3)
$$v_{S_q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2} v_S \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \phi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \phi) \right) \quad (140)$$

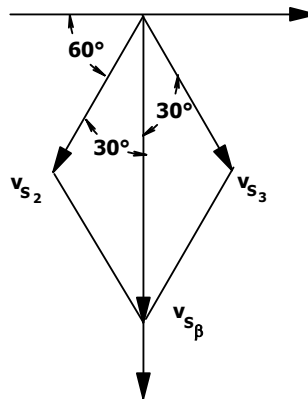


Fig. 11 – Diagrama de fasores para o eixo em quadratura.

Assim:

$$v_{S_q} = \sqrt{3} v_S \cos(\omega_s t + \phi) \quad (141)$$

b) Em seguida serão obtidas as tensões v_{S_d} e v_{S_q} para o referencial colocado no campo girante.

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_s t & -\text{sen } \omega_s t \\ \text{sen } \omega_s t & \cos \omega_s t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{S_\alpha} \\ v_{S_\beta} \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$\begin{bmatrix} v_{S_d} \\ v_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_s t & -\text{sen } \omega_s t \\ \text{sen } \omega_s t & \cos \omega_s t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} v_S \text{sen}(\omega_s t + \phi) \\ \sqrt{3} v_S \cos(\omega_s t + \phi) \end{bmatrix} \quad (143)$$

$$v_{S_d} = \sqrt{3} v_S (\cos \omega_s t \cdot \text{sen}(\omega_s t + \phi) - \text{sen } \omega_s t \cos(\omega_s t + \phi))$$

$$v_{S_d} = \sqrt{3} v_S (\cos \omega_s t \cdot (\text{sen } \omega_s t \cdot \cos \phi + \text{sen } \phi \cdot \cos \omega_s t) - \text{sen } \omega_s t (\cos \omega_s t \cdot \cos \phi - \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \omega_s t)) \quad (144)$$

$$v_{S_d} = \sqrt{3} v_S \text{sen } \phi$$

$$v_{S_q} = \sqrt{3} v_S (\text{sen } \omega_s t \cdot \text{sen}(\omega_s t + \phi) + \cos \omega_s t \cdot \cos(\omega_s t + \phi))$$

$$v_{S_q} = \sqrt{3} v_S (\text{sen } \omega_s t \cdot (\text{sen } \omega_s t \cdot \cos \phi + \text{sen } \phi \cdot \cos \omega_s t) + \cos \omega_s t \cdot (\cos \omega_s t \cdot \cos \phi - \text{sen } \phi \cdot \text{sen } \omega_s t)) \quad (145)$$

$$v_{S_q} = \sqrt{3} v_S \cos \phi$$

Seja:

$$\phi = 0 \quad (146)$$

Assim:

$$\begin{aligned} v_{S_d} &= 0 \\ v_{S_q} &= \sqrt{3} v_S \end{aligned} \tag{147}$$

Visto por um observador colocado no campo girante, as tensões de PARK são contínuas. A transformação de PARK é aplicada em cada intervalo, neles as tensões de alimentação permanecem constantes. Era de se esperar portanto que as tensões v_{S_d} e v_{S_q} também permanecessem constantes nesses intervalos. A Fig. 12 apresenta as tensões transformadas.

2)

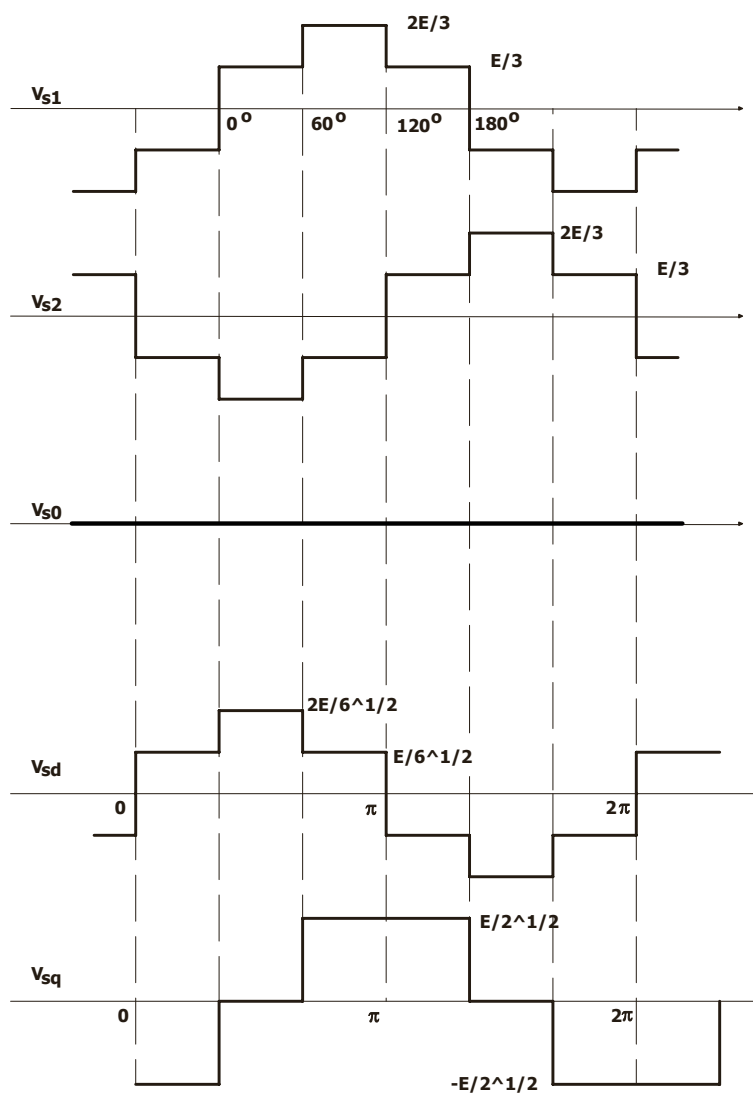


Fig. 12 – Representação gráfica das formas de onda transformadas.

6)

$$\begin{aligned}\theta &= \omega_m t + \theta_0 \\ \omega_s &= \omega_m + \omega_R\end{aligned}\quad (148)$$

$$\begin{aligned}i_{s_1} &= I_s \text{sen}(\omega_s t + \phi) \\ i_{s_2} &= I_s \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ + \phi) \\ i_{s_3} &= I_s \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ + \phi)\end{aligned}\quad (149)$$

$$\begin{aligned}i_{R_1} &= I_R \text{sen}(\omega_R t + \Delta) \\ i_{R_2} &= I_R \text{sen}(\omega_R t - 120^\circ + \Delta) \\ i_{R_3} &= I_R \text{sen}(\omega_R t + 120^\circ + \Delta)\end{aligned}\quad (150)$$

Aplicando-se a transformação de PARK com referencial no estator obtém-se:

$$\begin{aligned}i_{s_d} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_s \text{sen}(\omega_s t + \phi) \\ i_{s_q} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_s \cos(\omega_s t + \phi)\end{aligned}\quad (151)$$

Pois:

$$\begin{aligned}i_{s_d} &= i_{s_\alpha} \\ i_{s_q} &= i_{s_\beta}\end{aligned}\quad (152)$$

$$\begin{aligned}i_{R_\alpha} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_R \text{sen}(\omega_R t + \Delta) \\ i_{R_\beta} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_R \cos(\omega_R t + \Delta)\end{aligned}\quad (153)$$

mas,

$$\begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_m t & -\text{sen} \omega_m t \\ \text{sen} \omega_m t & \cos \omega_m t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix}\quad (154)$$

Observar que o motor está girando no sentido horário e foi convencionalizado o sentido anti-horário na obtenção das matrizes de transformação. Assim,

$$\begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\omega_m t) & -\text{sen}(-\omega_m t) \\ \text{sen}(-\omega_m t) & \cos(-\omega_m t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_\alpha} \\ i_{R_\beta} \end{bmatrix} \quad (155)$$

$$\begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_m t) & \text{sen}(\omega_m t) \\ -\text{sen}(\omega_m t) & \cos(\omega_m t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R_d} \\ i_{R_d} \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$i_{R_d} = \sqrt{\frac{3}{2}} I_R (\cos \omega_m t \cdot \text{sen}(\omega_R t + \Delta) + \text{sen} \omega_m t \cdot \cos(\omega_R t + \Delta)) \quad (157)$$

$$i_{R_q} = -\sqrt{\frac{3}{2}} I_R (\text{sen} \omega_m t \cdot \text{sen}(\omega_R t + \Delta) - \cos \omega_m t \cdot \cos(\omega_R t + \Delta))$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_m t) \cdot \text{sen}(\omega_R t + \Delta) + \text{sen}(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_R t + \Delta) &= \text{sen}(\omega_m t + \omega_R t + \Delta) \\ -(\cos(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_R t + \Delta) - \text{sen}(\omega_m t) \cdot \text{sen}(\omega_R t + \Delta)) &= -\cos(\omega_m t + \omega_R t + \Delta) \end{aligned} \quad (158)$$

Assim:

$$\begin{aligned} i_{R_d} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_R \text{sen}((\omega_R + \omega_m) t + \Delta) \\ i_{R_q} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_R \cos((\omega_R + \omega_m) t + \Delta) \end{aligned} \quad (159)$$

mas:

$$\omega_R + \omega_m = \omega_S \quad (160)$$

Assim:

$$\begin{aligned} i_{R_d} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_R \text{sen}(\omega_S t + \Delta) \\ i_{R_q} &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_R \cos(\omega_S t + \Delta) \end{aligned} \quad (161)$$

Em seguida será calculado o torque:

$$T = m_{SR} (i_{S_q} i_{R_d} - i_{S_d} i_{R_q}) \quad (162)$$

$$T = \frac{3}{2} m_{SR} I_S I_R \left(\cos(\omega_s t + \phi) \cdot \sin(\omega_s t + \Delta) - \sin(\omega_s t + \phi) \cdot \cos(\omega_s t + \Delta) \right) \quad (163)$$

$$T = \frac{3}{2} m_{SR} I_S I_R \sin(\Delta - \phi)$$

7)

a)

$$\begin{aligned} i_{S_a} &= I_{cc} = i_{S_d} \\ i_{S_b} &= 0 = i_{S_q} \end{aligned} \quad (164)$$

O modelo para estas restrições e para o referencial colocado no campo girante é o seguinte:

$$\begin{cases} v_{S_d} = R_S i_{S_d} \\ 0 = R_R i_{R_d} + n \dot{\theta} \mathbb{L}_R i_{R_q} \\ 0 = -n \dot{\theta} m_{SR} i_{S_d} - n \dot{\theta} \mathbb{L}_R i_{R_d} + R_R i_{R_q} \end{cases} \quad (165)$$

O torque é dado pela expressão:

$$T = n m_{SR} \left(i_{S_q} i_{R_d} - i_{S_d} i_{R_q} \right) \quad (166)$$

Assim, em módulo:

$$T = n m_{SR} I_{cc} i_{R_q} \quad (167)$$

Resta-nos determinar a corrente i_{R_q} .

$$i_{R_q} = \frac{n \dot{\theta} m_{SR} I_{cc}}{R_R} + \frac{n \dot{\theta} \mathbb{L}_R}{R_R} i_{R_d} \quad (168)$$

$$i_{R_d} = - \frac{n \dot{\theta} \mathbb{L}_R i_{R_q}}{R_R} \quad (169)$$

Assim:

$$\dot{i}_{R_q} = \frac{n \dot{\theta} m_{SR} I_{cc}}{R_R} + \frac{n \dot{\theta} L_R}{R_R} \cdot \frac{-n \dot{\theta} L_R i_{R_q}}{R_R} \quad (170)$$

$$\dot{i}_{R_q} = \frac{n \dot{\theta} m_{SR} I_{cc} R_R}{R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2} \quad (171)$$

Levando-se a expressão de \dot{i}_{R_q} na expressão do torque obtém-se:

$$T = \frac{n^2 \dot{\theta} m_{SR}^2 I_{cc}^2 R_R}{R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2} \quad (172)$$

mas,

$$I_{cc} = \frac{v_{S_d}}{R_S} \quad (173)$$

Assim:

$$T = \frac{n^2 \dot{\theta} m_{SR}^2 v_{S_d}^2 R_R}{R_S^2 \left(R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 \right)} \quad (174)$$

b)

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{n^2 m_{SR}^2 v_{S_d}^2 R_R}{R_S^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{\theta}}{\left(R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 \right)} \right) \quad (175)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{\theta}}{\left(R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 \right)} \right) = \frac{1}{R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2} - \frac{2n^2 \dot{\theta} L_R^2}{\left(R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 \right)^2} = 0 \quad (176)$$

Assim:

$$\begin{aligned} R_R^2 + n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 &= 2n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 \\ R_R^2 &= n^2 \dot{\theta}^2 L_R^2 \\ n \dot{\theta} &= \frac{R_R}{L_R} \end{aligned} \quad (177)$$

Está é a condição para o máximo torque.

c)

$$T = \frac{n \frac{R_R}{L_R} m_{SR}^2 v_{S_d}^2 R_R}{R_S^2 \left(R_R^2 + \frac{R_R^2}{L_R^2} L_R^2 \right)} \quad (178)$$

$$T = \frac{nm_{SR}^2 v_{S_d}^2}{2L_R R_S^2} \quad (179)$$

Esta expressão dá o torque máximo de frenagem.

9) Seja o modelo, sob a forma de componentes de PARK instantâneos, com referencial no estator. Como o rotor está aberto, tem-se:

$$i_{R_d} = i_{R_q} = 0 \quad (180)$$

Se o motor está em repouso, então os eixos d e q são desacoplados. Para fazer o estudo será considerado então somente o eixo d. Assim:

$$\begin{cases} v_{S_d} = R_S i_{S_d} + p L_{S_d} \dot{i}_{S_d} \\ v_{R_d} = p m_{SR} i_{S_d} \end{cases} \quad (181)$$

Aplicando a transformação de Laplace obtém-se:

$$\begin{aligned}
 v_{S_d}(s) &= (R_s + s\mathbb{L}_s) i_{S_d}(s) \\
 i_{S_d}(s) &= \frac{v_{S_d}(s)}{R_s + s\mathbb{L}_s} \\
 v_{R_d}(s) &= sm_{SR} i_{S_d}(s)
 \end{aligned}
 \tag{182}$$

Assim:

$$v_{R_d}(s) = sm_{SR} \frac{v_{S_d}(s)}{R_s + s\mathbb{L}_s} \tag{183}$$

Seja:

$$\begin{aligned}
 v_{S_1} &= v_s \text{sen}(\omega_s t) \\
 v_{S_2} &= v_s \text{sen}(\omega_s t - 120^\circ) \\
 v_{S_3} &= v_s \text{sen}(\omega_s t + 120^\circ)
 \end{aligned}
 \tag{184}$$

Assim:

$$v_{S_d} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \text{sen}(\omega_s t) \tag{185}$$

$$v_{S_d} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \frac{\omega_s}{s^2 + \omega_s^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \frac{\omega_s}{(s + j\omega_s)(s - j\omega_s)} \tag{186}$$

Portanto:

$$v_{R_d}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \omega_s \frac{m_{SR}}{\mathbb{L}_s} \frac{s}{\left(\frac{R_s}{\mathbb{L}_s} + s\right)(s + j\omega_s)(s - j\omega_s)} \tag{187}$$

Seja:

$$\frac{1}{\zeta_s} = \frac{R_s}{\mathbb{L}_s} \tag{188}$$

Assim:

$$\frac{s}{\left(s + \frac{1}{\zeta_s}\right)(s + j\omega_s)(s - j\omega_s)} = \frac{A}{s + \frac{1}{\zeta_s}} + \frac{B}{s + j\omega_s} + \frac{B^*}{s - j\omega_s} \quad (189)$$

Assim:

$$\frac{s}{\left(s + \frac{1}{\zeta_s}\right)(s + j\omega_s)(s - j\omega_s)} = \frac{A}{s + \frac{1}{\zeta_s}} + \frac{B}{s + j\omega_s} + \frac{B^*}{s - j\omega_s}$$

$$A = \frac{-1}{\zeta_s \left(\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2 \right)}$$

$$B = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\zeta_s} - j\omega_s \right)}$$

$$C = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\zeta_s} + j\omega_s \right)}$$
(190)

$$v_{R_d}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \omega_s \frac{m_{SR}}{\mathbb{L}_s} \left(\frac{-1}{\zeta_s \left(\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2 \right)} \frac{1}{s + \frac{1}{\zeta_s}} + \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\zeta_s} - j\omega_s \right)} \frac{1}{s + j\omega_s} + \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\zeta_s} + j\omega_s \right)} \frac{1}{s - j\omega_s} \right) \quad (191)$$

Aplicando-se a transformação inversa de Laplace obtém-se:

$$\frac{1}{2 \left(\frac{1}{\zeta_s} - j\omega_s \right)} \frac{1}{s + j\omega_s} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2}} e^{-j\omega_s t} e^{j\phi_s} = A_1$$

$$\frac{1}{2 \left(\frac{1}{\zeta_s} + j\omega_s \right)} \frac{1}{s - j\omega_s} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2}} e^{j\omega_s t} e^{-j\phi_s} = A_2 \quad (192)$$

$$\phi_s = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_s \mathbb{L}_s}{R_s} \right)$$

Somando-se A_1 e A_2 obtém-se:

$$A_3 = A_1 + A_2 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2}} \left(e^{j(\omega_s t - \phi_s)} + e^{-j(\omega_s t - \phi_s)} \right) \quad (193)$$

Como:

$$\cos A = \frac{1}{2} (e^{jA} + e^{-jA}) \quad (194)$$

Assim:

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2}} \cos(\omega_s t - \phi_s) \quad (195)$$

Portanto:

$$v_{R_d}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \omega_s \frac{m_{SR}}{\mathbb{L}_s} \left(\frac{-1}{\zeta_s \left(\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2 \right)} e^{-\frac{1}{\zeta_s} t} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\zeta_s^2} + \omega_s^2}} \cos(\omega_s t - \phi_s) \right) \quad (196)$$

$$v_{R_d}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} v_s \omega_s m_{SR} \left(\frac{-R_s}{(R_s^2 + \mathbb{L}_s^2 \omega_s^2)} e^{-\frac{1}{\zeta_s} t} + \frac{1}{\sqrt{R_s^2 + \mathbb{L}_s^2 \omega_s^2}} \cos(\omega_s t - \phi_s) \right) \quad (197)$$

$$v_{R_d}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s \omega_s m_{SR}}{\sqrt{R_s^2 + \mathbb{L}_s^2 \omega_s^2}} \left(\cos(\omega_s t - \phi_s) - \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + \mathbb{L}_s^2 \omega_s^2}} e^{-\frac{1}{\zeta_s} t} \right) \quad (198)$$

Por outro lado:

$$\cos(\phi_s) = \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + \mathbb{L}_s^2 \omega_s^2}} \quad (199)$$

Assim:

$$v_{R_d}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v_s \omega_s m_{SR}}{\sqrt{R_s^2 + \mathbb{L}_s^2 \omega_s^2}} \left(\cos(\omega_s t - \phi_s) - \cos \phi_s e^{-\frac{1}{\zeta_s} t} \right) \quad (200)$$

10)

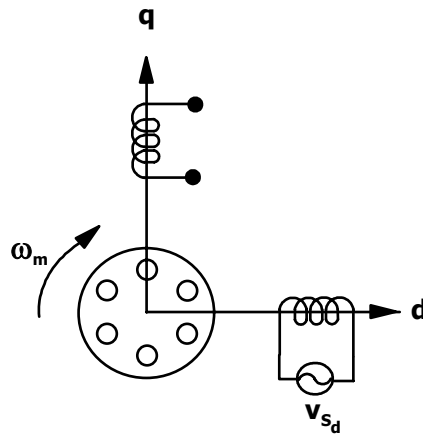


Fig. 13 – Máquina de indução bifásica com rotor em gaiola.

$$i_{S_q} = 0 \quad (201)$$

O modelo de PARK, para referencial no estator, regime permanente, velocidade constante e $i_{S_q} = 0$ está representado a seguir.

$$\begin{cases} v_{S_d} = (R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S) i_{S_d} + j\omega_S m_{SR} i_{R_d} \\ v_{S_q} = j\omega_S m_{SR} i_{R_q} \\ 0 = j\omega_S m_{SR} i_{S_d} + (R_R + j\omega_S \mathbb{L}_R) i_{R_d} + \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_q} \\ 0 = -m_{SR} \omega_m i_{S_d} - \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_d} + (R_R + j\omega_S \mathbb{L}_R) i_{R_q} \end{cases} \quad (202)$$

Vamos considerar:

- a) $R_S \approx 0$
- b) $R_R \gg \omega_S \mathbb{L}_R$

Assim:

$$\begin{cases} v_{S_d} = jX_S i_{S_d} + jX_m i_{R_d} \\ v_{S_q} = jX_m i_{R_q} \\ 0 = jX_m i_{S_d} + R_R i_{R_d} + \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_q} \\ 0 = -m_{SR} \omega_m i_{S_d} - \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_d} + R_R i_{R_q} \end{cases} \quad (203)$$

$$\omega_m = (1-s)\omega_S \quad (204)$$

Assim:

$$\begin{cases} v_{S_d} = jX_S i_{S_d} + jX_m i_{R_d} \\ v_{S_q} = jX_m i_{R_q} \\ 0 = jX_m i_{S_d} + R_R i_{R_d} + (1-s)X_R i_{R_q} \\ 0 = -X_m(1-s)i_{S_d} - (1-s)X_R i_{R_d} + R_R i_{R_q} \end{cases} \quad (205)$$

A idéia é empregar as expressões (205) para determinar a corrente i_{R_q} .

$$i_{S_d} = \frac{v_{S_d} - jX_m i_{R_d}}{jX_S} = \frac{v_{S_d}}{jX_S} - \frac{X_m i_{R_d}}{X_S} \quad (206)$$

10)

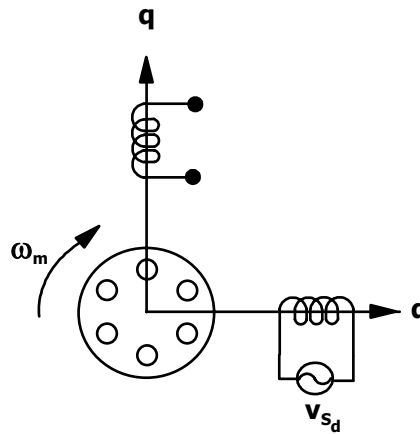


Fig. 14 – Máquina de indução bifásica com rotor em gaiola.

$$i_{S_q} = 0 \quad (207)$$

O modelo de PARK, para referencial no estator, regime permanente, velocidade constante e $i_{S_q} = 0$ está representado a seguir.

$$\begin{cases} v_{S_d} = (R_S + j\omega_S \mathbb{L}_S) i_{S_d} + j\omega_S m_{SR} i_{R_d} \\ v_{S_q} = j\omega_S m_{SR} i_{R_q} \\ 0 = j\omega_S m_{SR} i_{S_d} + (R_R + j\omega_S \mathbb{L}_R) i_{R_d} + \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_q} \\ 0 = -m_{SR} \omega_m i_{S_d} - \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_d} + (R_R + j\omega_S \mathbb{L}_R) i_{R_q} \end{cases} \quad (208)$$

Vamos considerar:

c) $R_S \approx 0$

d) $R_R \gg \omega_S \mathbb{L}_R$

Assim:

$$\begin{cases} v_{S_d} = jX_S i_{S_d} + jX_m i_{R_d} \\ v_{S_q} = jX_m i_{R_q} \\ 0 = jX_m i_{S_d} + R_R i_{R_d} + \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_q} \\ 0 = -m_{SR} \omega_m i_{S_d} - \omega_m \mathbb{L}_R i_{R_d} + R_R i_{R_q} \end{cases} \quad (209)$$

$$\omega_m = (1-s)\omega_S \quad (210)$$

Assim:

$$\begin{cases} v_{S_d} = jX_S i_{S_d} + jX_m i_{R_d} \\ v_{S_q} = jX_m i_{R_q} \\ 0 = jX_m i_{S_d} + R_R i_{R_d} + (1-s)X_R i_{R_q} \\ 0 = -X_m(1-s)i_{S_d} - (1-s)X_R i_{R_d} + R_R i_{R_q} \end{cases} \quad (211)$$

A idéia é empregar as expressões (205) para determinar a corrente i_{R_q} .

$$i_{S_d} = \frac{v_{S_d} - jX_m i_{R_d}}{jX_S} = \frac{v_{S_d}}{jX_S} - \frac{X_m i_{R_d}}{X_S} \quad (212)$$

Levando-se (212) na terceira expressão de (205) obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 &= jX_m \left(\frac{v_{S_d}}{jX_S} - \frac{X_m i_{R_d}}{X_S} \right) + R_R i_{R_d} + (1-s)X_R i_{R_q} \\ 0 &= \frac{X_m}{X_S} v_{S_d} - j \frac{X_m^2}{X_S} i_{R_d} + R_R i_{R_d} + (1-s)X_R i_{R_q} \\ 0 &= \frac{X_m}{X_S} v_{S_d} + \left(R_R - j \frac{X_m^2}{X_S} \right) i_{R_d} + (1-s)X_R i_{R_q} \end{aligned} \quad (213)$$

Levando-se (212) na quarta expressão de (205) obtém-se:

$$0 = -X_m(1-s) \left(\frac{v_{S_d}}{jX_S} - \frac{X_m i_{R_d}}{X_S} \right) - (1-s) X_R i_{R_d} + R_R i_{R_q} \quad (214)$$

$$0 = -X_m(1-s) \frac{v_{S_d}}{jX_S} + (1-s) \left(\frac{X_m^2}{X_S} - X_R \right) i_{R_d} + R_R i_{R_q}$$

Isolando-se i_{R_d} na expressão final de (213) obtém-se:

$$\left(R_R - j \frac{X_m^2}{X_S} \right) i_{R_d} = -\frac{X_m}{X_S} v_{S_d} - (1-s) X_R i_{R_q}$$

$$\left(R_R X_S - j X_m^2 \right) i_{R_d} = -X_m v_{S_d} - (1-s) X_S X_R i_{R_q} \quad (215)$$

$$i_{R_d} = -\frac{X_m v_{S_d}}{R_R X_S - j X_m^2} - \frac{(1-s) X_S X_R i_{R_q}}{R_R X_S - j X_m^2}$$

Levando-se a última expressão de (215) na última expressão de (214) obtém-se:

$$0 = -X_m(1-s) \frac{v_{S_d}}{jX_S} + (1-s) \left(\frac{X_m^2}{X_S} - X_R \right) i_{R_d} + R_R i_{R_q} \quad (216)$$

$$0 = jX_m(1-s) v_{S_d} + (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) i_{R_d} + R_R X_S i_{R_q} \quad (217)$$

$$0 = jX_m(1-s) v_{S_d} - (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) \left(\frac{X_m v_{S_d}}{R_R X_S - j X_m^2} + \frac{(1-s) X_S X_R i_{R_q}}{R_R X_S - j X_m^2} \right) + R_R X_S i_{R_q} \quad (218)$$

$$0 = jX_m(1-s) v_{S_d} + R_R X_S i_{R_q} - (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) \frac{X_m v_{S_d}}{R_R X_S - j X_m^2} - (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) \frac{(1-s) X_S X_R i_{R_q}}{R_R X_S - j X_m^2} \quad (219)$$

Assim:

$$0 = jX_m(1-s) (R_R X_S - j X_m^2) v_{S_d} - (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) X_m v_{S_d} + R_R X_S (R_R X_S - j X_m^2) i_{R_q} - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R i_{R_q} \quad (220)$$

Assim:

$$\left(R_R X_S (R_R X_S - j X_m^2) - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R \right) i_{R_q} = - \left(jX_m(1-s) (R_R X_S - j X_m^2) - (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) X_m \right) v_{S_d} \quad (221)$$

$$\left(R_R X_S (R_R X_S - jX_m^2) - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R \right) i_{R_q} = - \left(jX_m (1-s) (R_R X_S - jX_m^2) - (1-s) (X_m^2 - X_R X_S) X_m \right) v_{S_d} \quad (222)$$

$$\left(R_R X_S (R_R X_S - jX_m^2) - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R \right) i_{R_q} = \left((1-s) (X_m^2 - X_R X_S) X_m - jX_m (1-s) (R_R X_S - jX_m^2) \right) v_{S_d} \quad (223)$$

Portanto:

$$i_{R_q} = \frac{(1-s) (X_m^2 - X_R X_S) X_m - jX_m (1-s) (R_R X_S - jX_m^2)}{R_R X_S (R_R X_S - jX_m^2) - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R} v_{S_d} \quad (224)$$

$$i_{R_q} = \frac{(1-s) X_m^3 - (1-s) X_R X_S X_m - (1-s) jX_m R_R X_S - (1-s) X_m^3}{R_R X_S (R_R X_S - jX_m^2) - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R} v_{S_d} \quad (225)$$

$$i_{R_q} = \frac{-(1-s) X_R X_S X_m - (1-s) jX_m R_R X_S}{R_R X_S (R_R X_S - jX_m^2) - (X_m^2 - X_R X_S) (1-s)^2 X_S X_R} v_{S_d} \quad (226)$$

$$i_{R_q} = \frac{-(1-s) X_R X_m - (1-s) jX_m R_R}{R_R^2 X_S - jX_m^2 R_R - (1-s)^2 X_R X_m^2 + (1-s)^2 X_R^2 X_S} v_{S_d} \quad (227)$$

Assim:

$$v_{S_d} = jX_m i_{R_q} \quad (228)$$

$$v_{S_d} = \frac{-j(1-s) X_R X_m^2 + (1-s) X_m^2 R_R}{R_R^2 X_S - jX_m^2 R_R - (1-s)^2 X_R X_m^2 + (1-s)^2 X_R^2 X_S} v_{S_d} \quad (229)$$

$$v_{S_d} = \frac{-j(1-s) X_m^2 (X_R + jX_m)}{R_R^2 X_S - jX_m^2 R_R - (1-s)^2 X_R X_m^2 + (1-s)^2 X_R^2 X_S} v_{S_d} \quad (230)$$

Se R_R é suficientemente grande, pode-se adotar:

$$(1-s)^2 X_R (X_m^2 - X_S X_R) - R_R (R_R X_S - jX_m^2) \approx -R_R^2 X_S + jR_R X_m^2 \quad (231)$$

Assim:

$$v_{S_q} = \frac{j(1-s)X_m^2(-X_R - jX_m)}{R_R^2 X_S - jR_R X_m^2} v_{S_d} \quad (232)$$

Tomando os módulos, obtém-se:

$$v_{S_q} = (1-s)Kv_{S_d} \quad (233)$$

Sendo:

$$K = \left| \frac{-jX_m^2(X_R + jX_m)}{R_R^2 X_S - jR_R X_m^2} \right| \quad (234)$$

mas:

$$(1-s) = \frac{\omega_m}{\omega_s} \quad (235)$$

Assim:

$$v_{S_q} = \frac{Kv_{S_d}}{\omega_s} \omega_m \quad (236)$$

Deste modo, para as condições adotadas, em que $R_S \approx 0$ e R_R é grande em relação às indutâncias, a tensão gerada no enrolamento aberto é proporcional à velocidade.

5. CAPÍTULO V

3) Seja

$$\begin{aligned} i_{S_a} &= \sqrt{2} I_S \cos \omega_s t \\ i_{S_b} &= \sqrt{2} I_S \sin \omega_s t \end{aligned} \quad (237)$$

Assim, para o referencial colocado no campo girante, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} i_{S_d} \\ i_{S_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_s t & \text{sen} \omega_s t \\ -\text{sen} \omega_s t & \cos \omega_s t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_\alpha} \\ i_{S_\beta} \end{bmatrix} \quad (238)$$

$$\begin{aligned} i_{S_d} &= \sqrt{2} I_S (\cos^2 \omega_s t + \text{sen}^2 \omega_s t) = \sqrt{2} I_S \\ i_{S_q} &= \sqrt{2} I_S (-\text{sen} \omega_s t \cos \omega_s t + \text{sen} \omega_s t \cos \omega_s t) = 0 \end{aligned} \quad (239)$$

$$\begin{bmatrix} i_{S_+} \\ i_{S_-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} I_S \\ 0 \end{bmatrix} \quad (240)$$

$$\begin{aligned} i_{S_+} &= I_S \\ i_{S_-} &= I_S \end{aligned} \quad (241)$$

Consideremos o modelo do motor, sob a forma de componentes simétricas instantâneas, para o referencial no campo girante:

$$\begin{aligned} v_{S_+} &= (R_S + \mathbb{L}_S (p + j\omega_s)) i_{S_+} + m_{SR} (p + j\omega_s) i_{R_+} \\ 0 &= m_{SR} (p + j\omega_s - j\omega_m) i_{S_+} + (R_R + \mathbb{L}_R (p + j\omega_s - j\omega_m)) i_{R_+} \end{aligned} \quad (242)$$

Em regime permanente, tem-se $i_{R_+} = \bar{I}_R$.

Seja

$$j\omega_s - j\omega_m = j\omega_R \quad (243)$$

a pulsação das correntes do rotor.

Assim a equação do rotor será:

$$0 = m_{SR} (p + j\omega_R) I_S + (R_R + \mathbb{L}_R (p + j\omega_R)) \bar{I}_R \quad (244)$$

As correntes I_S e \bar{I}_R são constantes. Portanto:

$$p I_S = p \bar{I}_R = 0 \quad (245)$$

Assim:

$$0 = j\omega_R m_{SR} I_S + (R_R + j\omega_R L_R) \bar{I}_R$$

$$\bar{I}_R = -\frac{j\omega_R m_{SR}}{R_R + j\omega_R L_R} I_S \quad (246)$$

$$\bar{I}_R = -\frac{(\omega_R^2 m_{SR} L_R + j\omega_R m_{SR} R_R)}{R_R^2 + \omega_R^2 L_R^2} I_S$$

Assim:

$$i_{R_+} = -\frac{(\omega_R^2 m_{SR} L_R + j\omega_R m_{SR} R_R)}{R_R^2 + \omega_R^2 L_R^2} I_S$$

$$i_{R_-} = i_{R_+}^* \quad (247)$$

$$i_{R_-} = -\frac{(\omega_R^2 m_{SR} L_R - j\omega_R m_{SR} R_R)}{R_R^2 + \omega_R^2 L_R^2} I_S$$

Em seguida será calculado o torque.

$$T = 2n m_{SR} \operatorname{Im}(i_{S_+} i_{S_-}) \quad (248)$$

$$T = 2n m_{SR} \operatorname{Im}\left(-\frac{\omega_R^2 m_{SR} L_R + j\omega_R m_{SR} R_R}{R_R^2 + \omega_R^2 L_R^2}\right) \quad (249)$$

$$T = \frac{2n R_R \omega_R m_{SR}^2}{R_R^2 + \omega_R^2 L_R^2} I_S^2 \quad (250)$$

Este é o torque instantâneo. É constante ao longo do tempo. Portanto o torque médio é igual ao torque instantâneo.

Em seguida será obtida a tensão v_{S_+} .

$$v_{S_+} = (R_S + j\omega_S L_S) i_{S_+} + j\omega_R m_{SR} i_{R_+} \quad (251)$$

$$v_{S_+} = (R_S + j\omega_S L_S) I_S + \frac{\omega_R^2 m_{SR}^2}{R_R + j\omega_R L_R} I_S \quad (252)$$

$$v_{S_+} = (R_S + j\omega_S L_S) I_S + \frac{\omega_R^2 m_{SR}^2 R_R - j\omega_R^3 m_{SR}^2 L_R}{R_R + \omega_R L_R} I_S \quad (253)$$

$$v_{S_+} = \left(R_S + \frac{\omega_R^2 m_{SR}^2 R_R}{R_R + \omega_R \mathbb{L}_R} + j \left(\omega_S \mathbb{L}_S - \frac{\omega_R^3 m_{SR}^2 \mathbb{L}_R}{R_R + \omega_R \mathbb{L}_R} \right) \right) I_S \quad (254)$$

$$v_{S_-} = \left(R_S + \frac{\omega_R^2 m_{SR}^2 R_R}{R_R + \omega_R \mathbb{L}_R} - j \left(\omega_S \mathbb{L}_S - \frac{\omega_R^3 m_{SR}^2 \mathbb{L}_R}{R_R + \omega_R \mathbb{L}_R} \right) \right) I_S \quad (255)$$

$$v_{S_d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_{S_+} + v_{S_-}) \quad (256)$$

$$v_{S_q} = -\frac{j}{\sqrt{2}} (v_{S_+} - v_{S_-}) \quad (257)$$

Assim:

$$v_{S_d} = \sqrt{2} \left(R_S + \frac{\omega_R^2 m_{SR}^2 R_R}{R_R + \omega_R \mathbb{L}_R} \right) I_S \quad (258)$$

$$v_{S_q} = \sqrt{2} \left(\omega_S \mathbb{L}_S - \frac{\omega_R^3 m_{SR}^2 \mathbb{L}_R}{R_R + \omega_R \mathbb{L}_R} \right) I_S \quad (259)$$

Por outro lado:

$$v_{S_\alpha} = v_{S_d} \cos \omega_S t - v_{S_q} \sin \omega_S t \quad (260)$$

Assim:

$$v_{S_\alpha} = \sqrt{v_{S_d}^2 + v_{S_q}^2} \sin(\omega_S t - \phi) \quad (261)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_{S_q}}{v_{S_d}}$$

4) Seja o modelo sob a forma de componentes simétricas instantâneas, com referencial colocado no estator

$$\begin{bmatrix} v_{S_+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S + p \mathbb{L}_S & p m_{SR} \\ m_{SR} (p - j \omega_m) & R_R + \mathbb{L}_R (p - j \omega_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S_+} \\ i_{R_+} \end{bmatrix} \quad (262)$$

Para os enrolamentos rotóricos abertos obtém-se

$$v_{s_r} = (R_s + pL_s)i_{s_r} \quad (263)$$

$$v_{s_d} = \sqrt{3} V \cos \omega_s t \quad (264)$$

$$v_{s_q} = \sqrt{3} V \sin \omega_s t$$

$$v_{s_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_{s_d} + jv_{s_q}) \quad (265)$$

Assim:

$$v_{s_r} = \sqrt{\frac{3}{2}} V e^{j\omega_s t} \quad (266)$$

$$(R_s + pL_s)i_{s_r} = \sqrt{\frac{3}{2}} V e^{j\omega_s t} \quad (267)$$

Seja:

$$i_{s_{0+}} = 0 \quad (268)$$

e aplicando a transformada de Laplace

$$(R_s + sL_s)i_{s_r}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V}{s - j\omega_s} \quad (269)$$

$$i_{s_r}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} V \frac{1}{(R_s + sL_s)(s - j\omega_s)} \quad (270)$$

$$i_{s_r}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V}{L_s} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\zeta_s}\right)(s - j\omega_s)} \quad (271)$$

$$\frac{1}{\zeta_s} = \frac{R_s}{L_s}$$

$$\frac{1}{\left(s + \frac{1}{\zeta_s}\right)(s - j\omega_s)} = \frac{A}{s + \frac{1}{\zeta_s}} + \frac{B}{s - j\omega_s} \quad (272)$$

$$A = -\frac{1}{\left(\frac{1}{\zeta_s} + j\omega_s\right)} \quad (273)$$

$$B = \frac{1}{\left(\frac{1}{\zeta_s} + j\omega_s\right)}$$

$$i_{s_+}(s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V}{\mathbb{L}_s} \frac{1}{\left(\frac{1}{\zeta_s} + j\omega_s\right)} \left(-\frac{1}{s + \frac{1}{\zeta_s}} + \frac{1}{s - j\omega_s} \right) \quad (274)$$

Encontrando-se a transformada inversa de Laplace, obtém-se:

$$i_{s_+}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} V \frac{1}{(R_s + j\omega_s \mathbb{L}_s)} \left(e^{j\omega_s t} - e^{-\frac{1}{\zeta_s} t} \right) \quad (275)$$

Após o transitório, tem-se:

$$i_{s_+}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} V \frac{1}{(R_s + j\omega_s \mathbb{L}_s)} e^{j\omega_s t} \quad (276)$$

Assim:

$$i_{s_1}(t) = \frac{1}{(R_s + j\omega_s \mathbb{L}_s)} \sqrt{2} V \cos \omega_s t \quad (277)$$

As correntes $i_{s_2}(t)$ e $i_{s_3}(t)$ são defasadas em relação à $i_{s_1}(t)$ de 120° e 240° .